

**REPARAMETERISASI MODEL *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN
BUJUR SANGKAR LATIN (*LATIN SQUARE*)**

Skripsi

Oleh

**HANI ARISIA PUTRI
NPM. 2217031039**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

REPARAMETERIZATION OF NON FULL RANK MODELS IN LATIN SQUARE DESIGN

By

Hani Arisia Putri

The Latin Square Design (LSD) is one of the experimental designs used to simultaneously control two sources of variation, namely row effects and column effects, so that the efficiency of treatment estimation can be improved. However, the model structure in LSD creates linear dependence among parameters, causing the design matrix to be non-full rank. This condition results in the model parameters being unable to be uniquely estimated using the Least Squares method. To overcome this problem, a theoretical approach was applied by transforming the original model parameters into linearly independent parameters, thereby producing a new full-rank design matrix. Furthermore, the parameters were estimated using the least squares method and evaluated through simulations under various error variance values. The results showed that the estimable functions of the initial model could be expressed in terms of the new parameters obtained from reparameterization. The simulation results indicated that the average estimates were close to the true parameter values, with relatively small bias approaching zero under several error variance conditions. This demonstrates that the Least Square estimators in the reparameterized model are unbiased. Therefore, reparameterization is an effective approach for overcoming the non-full rank problem in the Latin Square Design model.

Keywords: Latin Square Design, Non Full Rank, Reparameterization, Estimable Function, Least Square.

ABSTRAK

REPARAMETERISASI MODEL *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN BUJUR SANGKAR LATIN (*LATIN SQUARE*)

Oleh

Hani Arisia Putri

Rancangan Bujur Sangkar Latin (RBSL) merupakan salah satu desain percobaan yang digunakan untuk mengendalikan dua sumber keragaman secara simultan, yaitu faktor baris dan faktor kolom, sehingga efisiensi pendugaan perlakuan dapat meningkat. Namun, struktur model pada RBSL menimbulkan ketergantungan linear antar parameter yang menyebabkan matriks desain bersifat *non full rank*. Kondisi tersebut mengakibatkan parameter model tidak dapat diestimasi secara unik menggunakan metode *least square*. Untuk mengatasi masalah tersebut, diterapkan metode penelitian yang dilakukan melalui kajian teoritis dengan membentuk parameter model menjadi parameter yang bebas linear sehingga diperoleh matriks desain baru *full rank*. Selanjutnya, parameter diduga menggunakan metode kuadrat terkecil dan dievaluasi melalui simulasi pada berbagai nilai varians galat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa fungsi *estimable* model awal dapat dinyatakan dalam parameter baru hasil reparameterisasi. Simulasi menunjukkan rata-rata penduga parameter sebenarnya dengan nilai bias relatif kecil mendekati nol pada beberapa kondisi varians galat. Hal ini menunjukkan bahwa penduga *Least Square* pada model hasil reparameterisasi bersifat tak bias. Dengan demikian, reparameterisasi efektif digunakan untuk mengatasi masalah *non full rank* pada model RBSL.

Kata-kata kunci: Rancangan Bujur Sangkar Latin, *Non Full Rank*, Reparameterisasi, Fungsi *Estimable*, *Least Square*.

**REPARAMETERISASI MODEL *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN
BUJUR SANGKAR LATIN (*LATIN SQUARE*)**

HANI ARISIA PUTRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi : **REPARAMETERISASI MODEL *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN BUJUR SANGKAR LATIN (*LATIN SQUARE*)**

Nama Mahasiswa : **Hani Arisia Putri**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031039**

Program Studi : **Matematika**

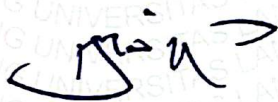
Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**




Prof. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.
NIP. 195701011984031020


Dr. Bernadhita Herindri, S.Si., M.Sc.
NIP. 199206302023212034

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
FMIPA Universitas Lampung


Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

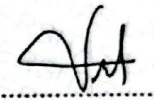
Ketua : Prof. Mustofa Usman, M.A.,
Ph.D.



Sekretaris : Dr. Bernadhita Herindri, S.Si.,
M.Sc.



Penguji
Bukan Pembimbing : Drs. Nusyirwan, M.Si.



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 19 Mei 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Hani Arisia Putri**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031039**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **REPARAMETERISASI MODEL *NON FULL RANK* PADA RANCANGAN BUJUR SANGKAR LATIN (*LATIN SQUARE*)**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 19 Mei 2026

Penulis



Hani Arisia Putri

NPM. 2217031039

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Hani Arisia Putri yang lahir di Metro pada tanggal 7 Mei 2004. Penulis merupakan anak pertama dari empat bersaudara, putri dari Bapak Rohmanto dan Ibu Susiana.

Penulis menempuh pendidikan taman kanak-kanak di TK PGRI pada tahun 2009-2010, kemudian menempuh pendidikan sekolah dasar di SD 2 Metro Timur pada tahun 2010-2016, sekolah menengah pertama di SMP Negeri 2 Metro pada tahun 2016-2019, dan pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 2 Metro pada tahun 2019-2022. Pada tahun 2022 penulis melanjutkan pendidikan ke perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Pada bulan Desember 2024 sampai Januari 2025, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Perencanaan Pembangunan Riset dan Inovasi Daerah (BAPPERIDA) Kota Bandar Lampung dengan penempatan di bidang Riset dan Inovasi Daerah (Ristek). Selanjutnya, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) periode kedua pada bulan Juli sampai Agustus 2025 di Desa Keteguhan, Teluk Betung Timur Kota Bandar Lampung. Kemudian, pada bulan Agustus sampai November 2025 penulis mengikuti magang mandiri di Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Pesawaran.

KATA INSPIRASI

”Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”

(Q.S Al-Insyirah: 5-6)

”Life isn’t about finding yourself, it’s about creating yourself and never stop learning, because life never stops teaching”

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah rabbil 'alamin, segala puji bagi Allah SWT., atas nikmat serta hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Mama dan Papa

Skripsi ini di persembahkan untuk kedua orang tua tercinta yang selalu memberikan kasih sayang yang mungkin tak selalu terucap tetapi selalu terasa cinta kasihnya, serta pengorbanan yang tak ternilai harganya. Terima kasih atas doa yang selalu dilangitkan dan tak pernah putus untuk penulis selama proses pendidikan ini. Terima kasih telah menjadi alasan untuk terus berjuang, setiap langkah dan pencapaian yang penulis raih, termasuk selesai skripsi ini, adalah bagian dari doa dan harapan kalian.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih atas bimbingan, dorongan, dan kesabaran yang diberikan sejak awal penyusunan hingga terselesaikannya skripsi ini. Semoga ilmu yang Bapak/Ibu berikan menjadi amal jariyah serta terus memberi manfaat bagi banyak orang.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih atas dukungan, keceriaan, kebaikan, serta kebersamaan yang sangat berharga selama masa perkuliahan hingga proses penyusunan karya ini. Kehadiran kalian telah menjadikan perjalanan ini lebih bermakna, penuh warna, dan sulit untuk dilupakan.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Reparameterisasi Model *Non Full Rank* pada Rancangan Bujur Sangkar Latin (*Latin Square*)" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW. Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Mustofa Usman, M.A., Ph.D., selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Bernadhita Herindri Samodera Utami, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung serta selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Mama, Papa, serta Adik-adikku yang senantiasa memberikan do'a dan motivasi kepada penulis.

7. Teman seperjuangan Ardila, Erisa, Nazwa, Kinasih dan Nadhia atas kebersamaan, dukungan, dan kerja sama yang telah terjalin selama masa perkuliahan hingga penyusunan karya ini. Setiap bantuan, semangat, dan cerita yang kita lewati bersama menjadi bagian berharga dalam perjalanan ini. Semoga kebersamaan ini tetap terjaga dan kita semua diberikan kesuksesan di masa depan.
8. Untuk seseorang yang tidak dapat saya sebutkan namanya, yang selalu ada disaat suka maupun duka yang telah memberikan saya dorongan, arahan, dan keyakinan bahwa setiap proses, seberat apa pun, dapat diselesaikan.
9. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2022.
10. Terakhir, untuk Hani Arisia Putri, diri penulis sendiri. Terima kasih atas segala perjuangan yang mungkin tidak selalu terlihat oleh orang lain, atas mimpi besar tentang karier yang diam-diam terus diperjuangkan meskipun belum menjadi jalan takdir untuk ditempuh saat ini. Namun, kamu telah membuktikan kemampuan untuk menyeimbangkan berbagai hal dengan baik hingga akhirnya mampu menyelesaikan perjalanan ini tepat waktu. Setiap rasa lelah, air mata, dan doa yang terpanjat dalam diam menjadi bukti keteguhan hati yang dimiliki. Kamu sudah memberikan yang terbaik. Teruslah melangkah dengan penuh keyakinan.

Bandar Lampung, 19 Mei 2026
Penulis,

Hani Arisia Putri
NPM. 2217031039

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Konsep Matriks	4
2.1.1 Matriks	4
2.1.2 Transpos Matriks	5
2.1.3 Determinan	5
2.1.4 Invers	7
2.1.5 Ruang Baris, Ruang Kolom dan Ruang Nul	12
2.1.6 Rank Matriks	15
2.2 Model Linear Umum	19
2.3 Model Linear <i>Non-Full-Rank</i>	20
2.4 <i>Least Square Estimation</i>	21
2.5 Fungsi <i>Estimable</i>	25
2.6 Reparameterisasi	26
2.7 Rancangan Bujur Sangkar Latin (<i>Latin Square Design</i>)	28
2.8 Pengujian Hipotesis	29
III METODE PENELITIAN	30
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	30
3.2 Data Penelitian	30
3.3 Metode Penelitian	30
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	34
4.1 Struktur Model dan Matriks Desain	34
4.2 Identifikasi Sifat <i>Non Full Rank</i> dan Singularitas	36

4.3	Membentuk Fungsi <i>Estimable</i> Melalui Operasi Baris Elementer . . .	38
4.4	Reparameterisasi Model <i>Non Full Rank</i> Pada <i>Latin Square</i>	43
4.5	Penduga Model Reparameterisasi <i>Full Rank</i>	47
4.6	Aplikasi Reparameterisasi Model <i>Non Full Rank</i> Pada <i>Latin Square</i>	49
4.7	Pengujian Hipotesis	53
4.8	Simulasi Pada Program SAS	56
V	KESIMPULAN	59
5.1	Kesimpulan	59
	DAFTAR PUSTAKA	60
	LAMPIRAN	62

DAFTAR TABEL

4.1	Data penelitian efektifitas jenis mesin fillet	49
4.2	Nilai estimasi γ	52
4.3	Nilai rata-rata pendugaan $\hat{\gamma}$ dengan $\sigma = 0,1$	57
4.4	Nilai rata-rata pendugaan $\hat{\gamma}$ dengan $\sigma = 0,5$	57
4.5	Nilai rata-rata pendugaan $\hat{\gamma}$ dengan $\sigma = 1$	58
4.6	Nilai rata-rata pendugaan $\hat{\gamma}$ dengan $\sigma = 2$	58

DAFTAR GAMBAR

3.1	Diagram alir metode penelitian	33
-----	--	----

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam penelitian eksperimen, desain percobaan yang baik merupakan kunci untuk memperoleh hasil yang valid dan akurat. Salah satu desain yang banyak digunakan dalam eksperimen ilmiah adalah Rancangan Bujur Sangkar Latin (RBSL) atau istilah lainnya *Latin Square Design* (LSD). *Latin Square* adalah susunan r huruf latin (A,B,C, dst) dalam kotak $r \times r$ sehingga tidak ada huruf yang muncul lebih dari satu kali dalam baris atau kolom. Dalam penelitian eksperimen, desain seperti LSD digunakan untuk mengendalikan dua sumber variabilitas gangguan secara bersamaan (simultan), yakni satu faktor baris dan satu faktor kolom, sehingga variabilitas residual dapat dikurangi dan efisiensi estimasi perlakuan meningkat (Moolman, 2020).

Namun, struktur *Latin Square* menyebabkan adanya hubungan linear antar parameter model, sehingga menghasilkan matriks desain \mathbf{X} yang *non full rank*. Dalam kondisi ini, penduga parameter dengan metode *Ordinary Least Squares* (OLS) tidak dapat diperoleh secara unik karena vektor parameter β menjadi tidak *estimable* dan tidak *testable* (Saleem & Jaber, 2022).

Metode reparameterisasi sering digunakan untuk model *non full rank* dalam mendefinisikan ulang dengan menggabungkan beberapa parameter menjadi satu sehingga matriks desain baru memiliki model *full rank*, maka dengan metode ini persamaan normal dapat diselesaikan secara unik dengan model *full rank* yang dapat mengestimasi parameter baru (Myers & Milton, 1991). Setelah dilakukan reparameterisasi, digunakan pendekatan umum untuk memperoleh penduga BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) berdasarkan prinsip teorema Gauss-Markov yang menghasilkan estimasi tak bias dan memiliki varians minimum di antara semua

penduga linear tak bias (Rencher & Schaalje, 2008).

Merujuk pada penelitian sebelumnya Moolman (2020), menggunakan pendekatan reparameterisasi untuk membentuk parameter-parameter baru yang dapat diidentifikasi pada model statistika yang bersifat *over-parameterized* dan *non full rank* akibat adanya pembatasan *sum-to-zero* pada setiap faktor. Selanjutnya Saleem & Jaber (2022), menyatakan bahwa ketika matriks $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ tidak memiliki rank penuh, maka parameter tidak dapat diestimasi secara langsung dan solusi harus diperoleh melalui reparameterisasi atau *generalized inverse*. Sementara itu Fan, *et al.* (2022), menyatakan bahwa pada model linear yang *non full rank*, parameter tidak dapat diestimasi secara langsung seperti pada model *full rank*, sehingga digunakan pendekatan melalui estimasi fungsi yang *estimable* dengan solusi persamaan normal berbasis *conditional inverse*, yang menghasilkan penduga *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) yang bersifat unik untuk fungsi *estimable*. Szczepańska-Álvarez (2023), juga menjelaskan bahwa pada model linear dengan matriks desain yang *non full rank*, estimator parameter tidak bersifat unik sehingga analisis difokuskan pada fungsi *estimable*, yaitu fungsi yang memiliki estimator linear tak bias dan memenuhi syarat berada dalam ruang kolom matriks desain, sehingga menjamin estimator yang unik.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, desain eksperimen Rancangan Bujur Sangkar Latin (RBSL) memiliki keterbatasan dalam susunan model yang menyebabkan adanya ketergantungan linear antar parameter, sehingga matriks desain bersifat singular atau *non full rank*. Kondisi ini mengakibatkan parameter model tidak dapat diestimasi secara unik, maka diperlukan pendekatan khusus seperti pembatasan *sum to zero*, penggunaan *generalized invers* atau penerapan reparamaterisasi. Oleh karena itu, penelitian ini menerapkan reparameterisasi pada model Rancangan Bujur Sangkar Latin yang bersifat singular atau *non full rank* agar model dapat diidentifikasi serta parameter yang dihasilkan bersifat *estimable*, tak bias serta memiliki interpretasi yang jelas.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan fungsi *estimable* pada model *non full rank* pada *Latin Square Design*.

2. Memperoleh penduga tak bias pada model *non full rank* hasil reparameterisasi dengan metode *Least Square*.
3. Menerapkan estimator pada fungsi *estimable* hasil reparameterisasi untuk mengevaluasi sifat ketakbiasan serta variasi penduga.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Meningkatkan pemahaman mengenai penanganan model *non full rank* melalui pendekatan reparameterisasi pada *Latin Square Design* sebagai solusi untuk memperoleh parameter yang *estimable*.
2. Memperoleh bentuk pendugaan parameter untuk model *non full rank* yang telah direparameterisasi sehingga menghasilkan penduga tak bias.
3. Menjadi dasar dan landasan teoritis bagi penelitian lanjutan terkait matriks desain *non full rank* serta penerapan metode pendugaan parameter lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Matriks

Konsep matriks merupakan bagian penting dalam aljabar linear karena digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linear, transformasi linear, dan berbagai aplikasi matematika (Anton & Rorres, 2010). Oleh karena itu, berikut konsep dasar matriks yang menjadi landasan dalam penelitian.

2.1.1 Matriks

Suatu matriks \mathbf{A} berukuran $n \times p$ adalah tatanan angka-angka atau elemen dengan n banyaknya baris dan p banyaknya kolom. Matriks \mathbf{A} memiliki elemen yang dinotasikan dengan:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]$$

dengan i menyatakan banyak baris dan j menyatakan banyak kolom (Usman & Warsono, 2009).

Contoh:

Matriks \mathbf{A} berukuran 4×4 yaitu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 5 \\ -3 & 6 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$

matriks \mathbf{B} berukuran 1×4 yaitu

$$\mathbf{B} = [4 \quad 2 \quad -1 \quad 5],$$

matriks **C** berukuran 3×2 yaitu

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

matriks **D** berukuran 2×1 yaitu

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dan matriks **E** berukuran 1×1 yaitu

$$\mathbf{E} = [2].$$

2.1.2 Transpos Matriks

Jika suatu matriks **A** berukuran $n \times p$, maka transpos **A** dilambangkan dengan \mathbf{A}^T berukuran $p \times n$ yang diperoleh melalui penukaran baris dengan kolom matriks **A** (Myers & Milton, 1991).

Contoh:

Jika matriks **A** berukuran 4×3 yaitu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ maka transpos matriks **A**

dilambangkan dengan \mathbf{A}^T berukuran 3×4 yaitu $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & -2 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

2.1.3 Determinan

Determinan dari suatu matriks **A** berordo $n \times n$ adalah jumlah dari semua hasil kali elemen **A** yang dinotasikan dengan $\det(\mathbf{A})$ atau $|\mathbf{A}|$ (Anton & Rorres, 2010). Secara umum, determinan dapat diperoleh dengan beberapa metode berikut.

1. Aturan Sarrus

Determinan dapat dihitung dengan metode Sarrus, yaitu dengan menyalin dua kolom pertama di sebelah kanan matriks, kemudian menjumlahkan hasil kali elemen-elemen yang membentuk diagonal searah ke kanan dan mengurangkannya dengan jumlah hasil kali elemen-elemen yang membentuk diagonal searah ke kiri (Anton & Rorres, 2010).

Contoh:

Diberikan matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$, maka determinan matriks \mathbf{A} dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (1 \times 5 \times 9) + (2 \times 6 \times 7) + (3 \times (-4) \times (-8)) \\ &\quad - [(3 \times 5 \times 7) + (1 \times 6 \times (-8)) + (2 \times (-4) \times 9)] \\ &= 45 + 84 + 96 - (105 - 48 - 72) \\ &= 225 - (-15) \\ &= 240. \end{aligned}$$

2. Ekspansi Kofaktor

Determinan suatu matriks \mathbf{A} dapat dihitung dengan mengalikan setiap elemen pada baris pertama matriks dengan kofaktor yang bersesuaian, kemudian menjumlahkan seluruh hasil perkalian tersebut. Metode perhitungan ini dikenal sebagai ekspansi kofaktor (*cofactor expansion*) sepanjang baris pertama matriks \mathbf{A} (Anton & Rorres, 2010).

Ekspansi terhadap baris:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{1j} C_{1j}$$

dan ekspansi terhadap kolom:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

dengan:

a_{ij} : elemen baris ke- i , kolom ke- j

C_{ij} : kofaktor, yang didefinisikan sebagai $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

M_{ij} : determinan submatriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke- i dan kolom ke- j .

Contoh:

Diberikan matriks \mathbf{A} berukuran 3×3 yaitu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

maka determinan matriks \mathbf{A} menggunakan metode ekspansi kofaktor adalah:

1). Pilih ekspansi sepanjang baris pertama

$$\det(\mathbf{A}) = 2C_{11} + 1C_{12} + 3C_{13}$$

2). Hitung kofaktor sepanjang baris pertama

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (5)(2) = -6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (0)(1) - (5)(1) = 5$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (0)(2) - (4)(1) = -4.$$

Jadi,

$$\det(\mathbf{A}) = 2(-6) + 1(5) + 3(-4) = -19$$

2.1.4 Invers

Jika \mathbf{A} adalah matriks berukuran $n \times n$, dan jika terdapat matriks \mathbf{B} yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, maka \mathbf{A} disebut dapat dibalik (*invertible*) dan \mathbf{B} disebut sebagai invers (*inverse*) dari \mathbf{A} (Anton & Rorres, 2010).

Contoh:

Matriks $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

karena

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

dan

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Definisi matriks singular

Jika \mathbf{A} adalah matriks berukuran $n \times n$ yang tidak memiliki invers, atau tidak terdapat matriks \mathbf{B} yang memenuhi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, maka \mathbf{A} dinyatakan sebagai matriks singular (Anton & Rorres, 2010).

Contoh:

Matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ adalah singular, karena $\det(\mathbf{A}) = 0$ atau $|\mathbf{A}| = 0$ yang diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (1 \times 6 \times 0 + 7 \times 0 \times 3 + 0 \times 2 \times 5) \\ &\quad - (0 \times 6 \times 3 + 1 \times 0 \times 5 + 7 \times 2 \times 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Diberikan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ sebagai matriks sebarang berukuran 3×3 . Kolom

ketiga dari \mathbf{BA} adalah $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ karena menghasilkan vektor

nol, maka $\mathbf{BA} \neq \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, tidak terdapat matriks \mathbf{B} yang memenuhi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Maka matriks \mathbf{A} dapat dinyatakan sebagai matriks singular.

Teorema 2.1.4.1

Jika \mathbf{B} dan \mathbf{C} kedua-duanya adalah invers dari matriks \mathbf{A} , maka $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Bukti:

Karena \mathbf{B} adalah invers dari \mathbf{A} , maka $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Dengan mengalikan kedua ruas di sisi kanannya dengan \mathbf{C} diperoleh $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}$ serta $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B}$, sehingga diperoleh $\mathbf{C} = \mathbf{B}$.

Teorema 2.1.4.2

Jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dengan ukuran yang sama, maka \mathbf{AB} dapat dibalik dan $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I},$$

dengan membuktikan bahwa matriks \mathbf{AB} invertibel dan inversnya adalah

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

dibuktikan bahwa

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1}$$

karena $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$, maka diperoleh

$$\mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

dengan cara serupa dapat ditunjukkan bahwa

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$$

karena hasil perkalian di kedua sisi menghasilkan matriks identitas, maka dapat disimpulkan bahwa \mathbf{AB} memiliki invers, yaitu

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Contoh:

Diberikan matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ dengan invers matriks $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

dan

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Diperoleh } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

Maka terbukti bahwa

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Untuk menentukan invers suatu matriks, terdapat beberapa metode yang dapat digunakan sebagai berikut.

1. Invers matriks dengan menggunakan adjoinnya

Diberikan matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

dengan

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$$

sedemikian rupa sehingga

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (3 \times 6 \times 0 + 2 \times 3 \times 2 + (-1) \times 1 \times (-4)) \\ &\quad - ((-1) \times 6 \times 2 + 3 \times 3 \times (-4) + 2 \times 1 \times 0) \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & \frac{-10}{64} \\ \frac{-16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

$$\text{maka diperoleh } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

2. Invers matriks dengan metode operasi baris

$$\text{Ditentukan matriks } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad B_2 = B_2 - 2B_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad B_3 = B_3 - B_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad B_3 = B_3 + 2B_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad B_3 = -B_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \quad B_1 = B_1 - 3B_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \quad B_2 = B_2 + 3B_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \quad B_1 = -2B_2 + B_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\text{maka diperoleh } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.1.5 Ruang Baris, Ruang Kolom dan Ruang Nul

Suatu matriks A berukuran $n \times p$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

vektor-vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_n &= \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pada R^p yang dibentuk dari baris-baris A disebut vektor baris (*row vector*) dari A dan vektor-vektor

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix}$$

pada R^n yang dibentuk dari kolom-kolom A disebut sebagai vektor kolom (*column vector*) dari A (Anton & Rorres, 2010).

Definisi Ruang Baris

Jika A adalah suatu matriks $n \times p$, maka subruang dari R^p yang direntang oleh vektor-vektor baris dari A disebut ruang baris dari A (Anton & Rorres, 2010).

Contoh:

Diberikan suatu matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$. Dilakukan operasi baris elementer

pada matriks A ke dalam bentuk eselon baris sehingga diperoleh

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan bentuk eselon baris tersebut, baris-baris tak nol membentuk basis bagi ruang baris matriks \mathbf{A} . Dengan demikian

$$\text{Row}(\mathbf{A}) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

dan dimensi ruang baris dari matriks \mathbf{A} adalah 2.

Definisi Ruang Kolom

Jika \mathbf{A} adalah suatu matriks $n \times p$, maka subruang dari R^n yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari \mathbf{A} disebut ruang kolom dari \mathbf{A} (Anton & Rorres, 2010).

Contoh:

Diberikan suatu matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

dilakukan operasi baris elementer pada matriks \mathbf{A} ke dalam bentuk eselon baris sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, untuk menentukan ruang kolom matriks \mathbf{A} , digunakan informasi posisi pivot pada bentuk eselon baris \mathbf{R} . Terlihat bahwa pivot berada pada kolom pertama dan kedua. Oleh karena itu, ruang kolom matriks \mathbf{A} dibentuk oleh kolom pertama dan kedua dari matriks asli \mathbf{A} , yaitu

$$\text{Col}(\mathbf{A}) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa dimensi ruang kolom matriks \mathbf{A} adalah 2. Kesamaan dimensi ruang baris dan ruang kolom menunjukkan bahwa rank matriks \mathbf{A} bernilai 2, sehingga terdapat dua baris bebas linear dan dua kolom bebas linear.

Definisi Ruang Nul

Jika \mathbf{A} adalah suatu matriks $n \times p$, maka ruang solusi dari sistem persamaan homogen $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, yang merupakan subruang dari R^p disebut ruang nul (*null space*) dari \mathbf{A} (Anton & Rorres, 2010).

Contoh:

Diberikan suatu matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

yang memenuhi $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

menghasilkan persamaan

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \quad \dots(1)$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \quad \dots(2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \dots(3)$$

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \quad \dots(4)$$

Dari persamaan (3), diperoleh $x_1 = -x_2 - x_3$. Nilai x_1 disubstitusikan ke masing-masing persamaan

$$(-x_2 - x_3) + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 = -2x_3 - x_4$$

dan

$$x_1 = -x_2 - x_3$$

$$x_1 = -(-2x_3 - x_4) - x_3$$

$$x_1 = x_3 + x_4.$$

Solusi umum dari sistem tersebut adalah $x_3 = s$ dan $x_4 = t$ maka diperoleh

$$x_1 = s + t$$

$$x_2 = -2s - t$$

atau secara equivalen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + t \\ -2s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dengan demikian, ruang nul matriks \mathbf{A} adalah

$$\text{Null}(\mathbf{A}) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

2.1.6 Rank Matriks

Menurut Usman & Warsono (2009), jika \mathbf{A} adalah $n \times p$ matriks ($p \leq n$), dengan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ menyatakan p dari $n \times 1$ vektor kolom dari \mathbf{A} . Maka dikatakan p vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ adalah linear dependen jika terdapat p elemen x_1, x_2, \dots, x_p

elemen bilangan real, sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \cdots + \mathbf{a}_px_p = 0,$$

yang berakibat $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$. Sebaliknya dikatakan bebas linear. Jika terdapat tepat $r \leq p$ himpunan vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ yang bebas linear, sementara sisanya dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari r vektor yang bebas linear, maka dikatakan peringkat matriks \mathbf{A} adalah r atau dilambangkan dengan $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$.

Contoh:

Diberikan matriks $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dengan vektor-vektor kolom penyusun matriks

\mathbf{A} adalah $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Untuk menentukan vektor-vektor

kolom tersebut linear dependen atau linear independen, dibentuk kombinasi linear homogen sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_nx_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear digunakan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = -B_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B_2 = -3B_1 + B_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B_3 = -2B_1 + B_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 \leftrightarrow B_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 + B_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B_3 = -4B_2 + B_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ yang merupakan matriks eselon baris tereduksi.}$$

Dengan demikian, sistem persamaan homogen yang diperoleh dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $x_1 = x_2 = 0$, maka vektor \mathbf{a}_1 dan \mathbf{a}_2 dikatakan linear independen. Oleh karena itu, vektor kolom matriks \mathbf{A} saling bebas linear sehingga diperoleh jumlah kolom pivot adalah dua dengan $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$.

Teorema 2.1.6.1

Jika \mathbf{A} adalah suatu matriks sebarang, maka ruang baris dan ruang kolom \mathbf{A} memiliki dimensi yang sama.

Bukti:

Matriks \mathbf{A} adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan ruang baris (*row space*) merupakan subruang dari R^p dan ruang kolom (*column space*) merupakan subruang dari R^n , sehingga secara struktural keduanya berada pada ruang yang berbeda. Dilakukan reduksi baris elementer terhadap \mathbf{A} sehingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi \mathbf{R} . Operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris dan jumlah baris tak nol pada \mathbf{R} sama dengan rank matriks. Misalkan terdapat r baris tak nol pada \mathbf{R} , maka diperoleh $\dim(\text{Row}(\mathbf{A})) = r$.

Kolom-kolom pivot pada matriks asli \mathbf{A} membentuk basis ruang kolom. Jumlah kolom pivot juga sama dengan jumlah baris tak nol pada \mathbf{R} , yaitu $\dim(\text{Col}(\mathbf{A})) = r$. Karena $\dim(\text{Row}(\mathbf{A})) = r$ dan $\dim(\text{Col}(\mathbf{A})) = r$, maka diperoleh $\dim(\text{Row}(\mathbf{A})) = \dim(\text{Col}(\mathbf{A}))$.

Teorema 2.1.6.2

Jika \mathbf{A} adalah suatu matriks dengan n kolom, maka

$$\text{rank}(\mathbf{A}) + \text{nulitas}(\mathbf{A}) = n.$$

Bukti:

Karena \mathbf{A} memiliki n kolom, maka sistem linear homogen $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ memiliki n faktor yang tidak diketahui (variabel). Variabel-variabel tersebut terbagi dalam dua kategori, yaitu variabel utama dan variabel bebas. Dengan demikian,

$$\left[\text{banyaknya variabel utama} \right] + \left[\text{banyaknya variabel bebas} \right] = n.$$

Banyaknya variabel utama sama dengan banyaknya 1 utama pada bentuk eselon baris tereduksi dari \mathbf{A} . Banyaknya 1 utama tersebut merupakan rank dari \mathbf{A} . Oleh karena itu,

$$\text{rank}(\mathbf{A}) + \left[\text{banyaknya variabel bebas} \right] = n.$$

Banyaknya variabel bebas sama dengan nulitas dari \mathbf{A} . Hal ini karena nulitas dari \mathbf{A} merupakan dimensi ruang solusi dari $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, yang sama dengan banyaknya parameter pada solusi umum atau banyaknya variabel bebas. Dengan demikian diperoleh $\text{rank}(\mathbf{A}) + \text{nulitas}(\mathbf{A}) = n$.

Contoh:

Diberikan suatu matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dilakukan operasi baris elementer pada matriks \mathbf{A} ke dalam bentuk eselon baris sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan bentuk eselon baris tersebut, banyaknya baris tak nol yang bebas linear adalah 2, sehingga diperoleh

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = 2.$$

Selanjutnya, untuk menentukan nulitas matriks \mathbf{A} , diperhatikan bahwa terdapat dua variabel bebas yaitu x_3 dan x_4 . Oleh karena itu, diperoleh

$$\text{nulitas}(\mathbf{A}) = 2.$$

Dengan demikian, dapat dibuktikan bahwa Teorema Rank–Nullity berlaku sebagai berikut:

$$\text{rank}(\mathbf{A}) + \text{nulitas}(\mathbf{A}) = n = 2 + 2 = 4$$

hasil tersebut menunjukkan bahwa jumlah rank dan nulitas matriks \mathbf{A} sama dengan banyaknya kolom matriks, yaitu 4.

2.2 Model Linear Umum

Model linear merupakan model matematis yang menghubungkan variabel respon dengan variabel penjelas melalui bentuk kombinasi linear parameter, yang secara umum dituliskan sebagai

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1}$$

dengan:

$\mathbf{Y}_{(n \times 1)}$: vektor peubah acak teramati

$\mathbf{X}_{(n \times p)}$: matriks ($n > p$) dengan unsur-unsurnya adalah bilangan tertentu yang diketahui

$\boldsymbol{\beta}_{(p \times 1)}$: vektor parameter yang tidak diketahui nilainya

$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n \times 1)}$: vektor acak yang tidak teramati, dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$
dan $\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$.

Model 2.1 dinamakan model linear umum. Model tersebut mempunyai pengertian khusus tergantung pada:

- 1). distribusi dari $\boldsymbol{\varepsilon}$
- 2). struktur kovarians matriks $\boldsymbol{\Sigma}$ dan
- 3). peringkat struktur dari matriks \mathbf{X} , jika peringkat atau rank dari matriks \mathbf{X} sama dengan jumlah kolomnya, maka dinamakan peringkat penuh (*full rank*), sedangkan jika peringkat matriksnya tidak penuh maka modelnya dinamakan model tidak penuh (*non full rank*) (Usman & Warsono, 2009).

2.3 Model Linear *Non-Full-Rank*

Menurut Zimmermen (2020), suatu matriks \mathbf{X} berukuran $n \times p$ dengan $\text{rank}(\mathbf{X}) = k$ maka model linear dikatakan *full rank* jika $k = p$, sedangkan model linear dikatakan *non full rank* jika $k < p$. Dalam pendekatan klasik, jumlah pengamatan n biasanya lebih besar daripada jumlah parameter p . Namun, dalam perkembangan statistika modern kondisi $p > n$ dapat terjadi karena data berdimensi tinggi. Oleh karena itu, diperlukan syarat $n \geq p$ sehingga model linear bersifat *full rank*. Model linear pada Persamaan 2.1 dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Pada model *non full rank* di atas, matriks desain \mathbf{X} berukuran $n \times p$ memiliki rank $k < p$ dengan $n \geq p$.

2.4 Least Square Estimation

Suatu model $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$ dimana vektor acak teramati $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T$ dikatakan memenuhi asumsi klasik model linear umum *full rank* jika terdapat matriks \mathbf{X} berukuran $n \times p$ sebagai berikut

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

dengan rank $k < n$, vektor parameter $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^T$ dan vektor acak tidak teramati $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T$ (Hallin, 2013). Metode kuadrat terkecil (*least square*) digunakan untuk meminimumkan jumlah kuadrat residual yang diperoleh dengan meminimumkan fungsi $\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$, sehingga menghasilkan nilai $\mathbf{e}^T \mathbf{e} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ sekecil mungkin (Myers & Milton, 1991).

Teorema 2.4.1

Misalkan $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, dengan \mathbf{X} adalah matriks berukuran $n \times (k + 1)$ dengan *full rank*, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor berukuran $(k + 1) \times 1$ dengan parameter yang tidak diketahui, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor acak berukuran $n \times 1$ dengan mean 0 dan varians $\sigma^2\mathbf{I}$. Estimator kuadrat terkecil untuk $\boldsymbol{\beta}$ dinotasikan dengan \mathbf{b} dan diberikan oleh $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$.

Bukti:

Vektor residual \mathbf{e} dapat ditulis sebagai $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}$ dan karenanya

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}). \quad (2.2)$$

Menyederhanakan persamaan tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \mathbf{e} &= (\mathbf{y}^T - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Ketika $(\mathbf{y}^T \mathbf{X}\mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}$, sehingga

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \mathbf{b}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{b}. \quad (2.3)$$

Untuk meminimumkan $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ sebagai fungsi \mathbf{b} , ekspresi tersebut diturunkan terhadap \mathbf{b} , kemudian turunannya disamakan dengan nol. Persamaan yang dihasilkan disebut persamaan normal. Dengan menggunakan aturan diferensiasi diperoleh

$$\frac{\partial \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\partial \mathbf{b}} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + [(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^T] \mathbf{b}.$$

Karena $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ bersifat simetris, maka berlaku $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^T = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\partial \mathbf{b}} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b}.$$

Dengan meminimumkan $\frac{\partial \mathbf{e}^T \mathbf{e}}{\partial \mathbf{b}} = 0$, maka diperoleh

$$-2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b} = 0$$

atau

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{b} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}.$$

Karena $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ non singular, maka kedua ruas persamaan dikalikan dengan $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ sehingga diperoleh

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (2.4)$$

Teorema 2.4.2

Diberikan $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana \mathbf{X} adalah matriks *full rank* berukuran $n \times (k + 1)$, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor berukuran $(k + 1) \times 1$ dengan parameter yang tidak diketahui, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor acak berukuran $n \times 1$ dengan mean 0 dan varians $\sigma^2 I$. Estimator kuadrat terkecil $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ merupakan estimator tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}$ dan memiliki $\text{Var}(\mathbf{b}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$.

Bukti:

- i. Jika $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, maka \mathbf{b} merupakan penduga tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}$, yang didefinisikan sebagai $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{b}) &= E [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}] \\
 &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E(\mathbf{y}) \\
 &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \\
 &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \boldsymbol{\beta} \\
 &= \mathbf{I} \boldsymbol{\beta} \\
 &= \boldsymbol{\beta}.
 \end{aligned}$$

Maka, \mathbf{b} merupakan estimator tak bias bagi $\boldsymbol{\beta}$.

ii. Jika diasumsikan varians galat adalah $\sigma^2 \mathbf{I}$, maka $\text{Var}(\mathbf{b})$ adalah

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\mathbf{b}) &= \text{Var} ((\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}) \\
 &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \text{Var}(\mathbf{y}) \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\
 &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \sigma^2 \mathbf{I} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\
 &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})] (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \\
 &= \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}.
 \end{aligned}$$

Dalam model penuh, varians σ^2 diduga secara tak bias oleh

$$s^2 = \frac{1}{n-p} \mathbf{Y}^T [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] \mathbf{Y} \quad (2.5)$$

dengan

$$\text{SSE} = \mathbf{Y}^T [\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T] \mathbf{Y}.$$

Teorema 2.4.3

Jika $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, dengan \mathbf{X} adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan rank $k \leq p$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$, maka

$$s^2 = \frac{\text{SSE}}{n-k}$$

adalah penduga tak bias untuk σ^2 .

Bukti:

$$\begin{aligned}
 E(s^2) &= E\left(\frac{\text{SSE}}{n-k}\right) \\
 &= \frac{1}{n-k}E(\text{SSE}) \\
 &= \frac{1}{n-k}E[\mathbf{Y}^T(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)\mathbf{Y}] \\
 &= \frac{1}{n-k}E[\mathbf{Y}^T(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{Y}].
 \end{aligned}$$

Gunakan konsep nilai harapan bentuk kuadrat

$$E(\mathbf{Y}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{V}) + \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$$

dengan $\text{Var}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V} = \sigma^2\mathbf{I}$ dan $E(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{Y}^T(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{Y}) &= \text{tr}((\mathbf{I} - \mathbf{P})\sigma^2) + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\
 &= \sigma^2\text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T) + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^T \\
 &\quad (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\
 &= \sigma^2(n-k) + (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\
 &= \sigma^2(n-k) + (\mathbf{X}^T\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{X}^T\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\
 &= \sigma^2(n-k) + \mathbf{X}^T\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}^T\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\
 &= \sigma^2(n-k)
 \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 E(s^2) &= \frac{1}{n-k}\sigma^2(n-k) \\
 &= \sigma^2.
 \end{aligned}$$

Teorema 2.4.4

Teorema Gauss-Markov, misalkan $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, dimana \mathbf{X} adalah matriks berukuran $n \times (k+1)$ dengan *full rank*, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor berukuran $(k+1) \times 1$ dengan parameter yang tidak diketahui, dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor acak berukuran $n \times 1$ dengan mean 0 dan varians $\sigma^2\mathbf{I}$. Estimator kuadrat terkecil \mathbf{b} adalah estimator linear tak bias terbaik (BLUE) untuk $\boldsymbol{\beta}$.

Bukti:

Misalkan \mathbf{b}^* adalah estimator linear tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}$. Estimator ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{b}^* = [(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T + \mathbf{B}]\mathbf{y} \quad (2.6)$$

dimana \mathbf{B} adalah matriks bilangan riil berukuran $(k + 1) \times n$. Dengan mengambil nilai harapan diperoleh

$$\begin{aligned} E(\mathbf{b}^*) &= [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] E(\mathbf{y}) \\ &= [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{X}] \boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Karena \mathbf{b}^* adalah estimator tak bias untuk $\boldsymbol{\beta}$, maka $E(\mathbf{b}^*) = \boldsymbol{\beta}$. Akibatnya, $[\mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{X}] \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$. Hal ini mengakibatkan $\mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{0}$. Berdasarkan aturan varians diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{b}^*) &= \text{Var} \left([(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] \mathbf{y} \right) \\ &= [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] \sigma^2 \mathbf{I} [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}]^T \\ &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T + \mathbf{B}] [\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B}^T] \\ &= \sigma^2 \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{B} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{B}^T \right] \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{0}$, maka berlaku pula $\mathbf{X}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{b}^*) &= \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{B}^T] \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} + \sigma^2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ &= \text{Var}(\mathbf{b}) + \sigma^2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T. \end{aligned}$$

Entri diagonal utama ke- i dari matriks $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ adalah

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Oleh karena itu, entri diagonal utama diminimumkan ketika $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Dengan demikian, $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$. Jadi, estimator kuadrat terkecil \mathbf{b} merupakan estimator linear tak bias terbaik (BLUE) untuk $\boldsymbol{\beta}$.

2.5 Fungsi Estimable

Menurut Khuri (2009), estimabilitas merupakan sifat penting pada matriks \mathbf{X} *non full rank*, karena pada kondisi tersebut persamaan *least square* tidak memberikan

solusi yang unik untuk menduga vektor parameter β . Namun, fungsi linear tertentu dari β , yaitu $c^T\beta$ dengan c^T merupakan kombinasi linear dari baris-baris matriks \mathbf{X} , masih dapat memiliki penduga yang unik. Fungsi linear tersebut disebut fungsi *estimable*. Elemen-elemen dari β dapat diperoleh melalui berbagai solusi persamaan normal. Karena vektor parameter β dalam model linear memiliki p elemen, maka parameter tersebut tidak selalu dapat dihitung secara keseluruhan. Oleh karena itu, hanya fungsi linear dari β dalam bentuk $c^T\beta$ yang dapat dihitung. Namun, terdapat kondisi tertentu dimana β dapat dihitung secara unik.

Definisi 2.5.1

Fungsi linear $c^T\beta$, dimana c adalah vektor konstan, disebut *estimable* jika terdapat fungsi linear dari \mathbf{Y} dalam bentuk $\mathbf{a}^T\mathbf{Y}$ sedemikian sehingga $E(\mathbf{a}^T\mathbf{Y}) = c^T\beta$ (Khuri, 2009).

Teorema 2.5.1

Fungsi linear $c^T\beta$ dapat dihitung jika dan hanya jika c^T termasuk dalam ruang baris dari \mathbf{X} pada model $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$, yaitu $c^T = \mathbf{a}^T\mathbf{X}$ untuk suatu vektor \mathbf{a} .

Bukti:

Jika $c^T\beta$ dapat dihitung, maka berdasarkan Definisi 2.5.1 terdapat vektor \mathbf{a} sehingga $E(\mathbf{a}^T\mathbf{Y}) = c^T\beta$. Karena $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta$, maka $E(\mathbf{a}^T\mathbf{Y}) = \mathbf{a}^T\mathbf{X}\beta$. Sehingga untuk setiap β harus dipenuhi

$$\mathbf{a}^T\mathbf{X} = c^T \quad (2.7)$$

yang menunjukkan bahwa c^T merupakan kombinasi linear dari baris-baris matriks \mathbf{X} , sehingga

$$c^T \in R(\mathbf{X})$$

dengan c^T termasuk dalam ruang baris matriks \mathbf{X} . Sebaliknya, jika $c^T = \mathbf{a}^T\mathbf{X}$ untuk suatu vektor \mathbf{a} , maka $E(\mathbf{a}^T\mathbf{Y}) = \mathbf{a}^T\mathbf{X}\beta = c^T\beta$. Oleh karena itu, $c^T\beta$ merupakan fungsi *estimable*, sehingga fungsi tersebut dapat dihitung.

2.6 Reparameterisasi

Menurut Rencher & Schaalje (2008), reparameterisasi digunakan untuk mentransformasi model *non full rank* $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$ dengan \mathbf{X} berukuran $n \times p$ dan $\text{rank}(\mathbf{X}) = k < p \leq n$ menjadi model *full rank* $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\gamma + \varepsilon$, dengan \mathbf{Z}

berukuran $n \times k$ dan $\text{rank}(\mathbf{Z}) = k$, serta $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{U}\boldsymbol{\beta}$ merupakan himpunan dari k fungsi *estimable* yang saling bebas linear dari $\boldsymbol{\beta}$. Dengan demikian,

$$\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (2.8)$$

dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Z}\mathbf{U}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

dengan $\mathbf{X} = \mathbf{Z}\mathbf{U}$, dimana matriks \mathbf{U} berukuran $k \times p$ dengan $\text{rank}(\mathbf{U}) = k < p$ serta matriks $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ bersifat non singular. Persamaan $\mathbf{Z}\mathbf{U} = \mathbf{X}$ dapat dikalikan dengan \mathbf{U}^T sehingga diperoleh

$$\mathbf{Z}\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{X}\mathbf{U}^T$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{U}^T(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1} \quad (2.9)$$

Untuk menunjukkan bahwa \mathbf{Z} memiliki rank penuh (*full rank*), dapat dilihat bahwa $\text{rank}(\mathbf{Z}) \geq \text{rank}(\mathbf{Z}\mathbf{U}) = \text{rank}(\mathbf{X}) = k$. Namun, $\text{rank}(\mathbf{Z})$ tidak dapat lebih besar dari k karena matriks \mathbf{Z} hanya memiliki k kolom. Dengan demikian, $\text{rank}(\mathbf{Z}) = k$, sehingga model $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan model *full rank*. Maka persamaan normal $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{y}$ memiliki solusi unik yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y}. \quad (2.10)$$

Dalam model *full rank* hasil reparameterisasi $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$ estimator tak bias untuk σ^2 diberikan oleh

$$S^2 = \frac{1}{n - k} (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}). \quad (2.11)$$

Karena $\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ maka estimator $\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ dan $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah sama, yaitu $\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Dengan demikian diperoleh SSE yang sama, yaitu

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\gamma}}). \quad (2.12)$$

Himpunan $\mathbf{U}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}$ membentuk fungsi-fungsi *estimable* yang bebas linear. Dengan demikian, fungsi $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\beta}$ yang *estimable* dapat dinyatakan sebagai fungsi dari parameter baru $\boldsymbol{\gamma}$ (Rencher & Schaalje, 2008).

2.7 Rancangan Bujur Sangkar Latin (*Latin Square Design*)

Menurut Montgomery (2013), *Latin Square Design* (LSD) digunakan untuk menghilangkan dua sumber variabilitas gangguan, sehingga memungkinkan dilakukan pemblokiran dalam dua arah secara sistematis. Dengan demikian, baris dan kolom secara sistematis mewakili dua pembatasan pada randomisasi. Secara umum, sebuah persegi Latin untuk r perlakuan, atau persegi Latin berukuran $r \times r$, merupakan suatu matriks yang terdiri atas r baris dan r kolom. Setiap dari r^2 sel yang terbentuk memuat satu dari r perlakuan, dan setiap perlakuan hanya muncul satu kali pada setiap baris dan setiap kolom. Secara umum, model linear untuk Rancangan Bujur Sangkar Latin (RBSL) dengan r perlakuan adalah

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \rho_k + \varepsilon_{ijk}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, r \\ j = 1, 2, 3, \dots, r \\ k = 1, 2, 3, \dots, r \end{cases} \quad (2.13)$$

dimana:

- y_{ijk} : pengamatan pada baris ke- i , kolom ke- j , dan perlakuan ke- k ,
- μ : nilai tengah umum,
- α_i : efek/pengaruh baris ke- i ,
- τ_j : efek/pengaruh kolom ke- j ,
- ρ_k : efek/pengaruh perlakuan ke- k ,
- ε_{ijk} : $\sim N(0, \sigma^2)$.

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^r \tau_j = 0, \quad \sum_{k=1}^r \rho_k = 0.$$

Model tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk model linear $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ dengan $\boldsymbol{\beta} = [\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \tau_1, \dots, \tau_r, \rho_1, \dots, \rho_r]^T$ dan matriks desain \mathbf{X} pada *Latin Square* berukuran $r^2 \times (1 + 3r)$. Struktur *Latin Square* menyebabkan adanya ketergantungan linear di antara kolom-kolom yang merepresentasikan efek baris, kolom, dan perlakuan, karena masing-masing perlakuan muncul tepat satu kali pada setiap baris dan setiap kolom (Montgomery, 2013).

2.8 Pengujian Hipotesis

Menurut Rencher & Schaalje (2008), suatu hipotesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k$ dikatakan dapat diuji (*testable*) jika terdapat suatu himpunan fungsi *estimable* yang saling bebas linear, yaitu \mathbf{u} sedemikian sehingga H_0 benar apabila

$$\mathbf{u}_1^T \boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}_2^T \boldsymbol{\beta} = \dots = \mathbf{u}_m^T \boldsymbol{\beta} = 0$$

serta H_0 dapat dinyatakan dalam bentuk

$$H_0 : \mathbf{U}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji F , yaitu perbandingan antara jumlah kuadrat hipotesis terhadap derajat bebasnya dengan jumlah kuadrat galat terhadap derajat bebas galat, yang dituliskan sebagai berikut:

$$F = \frac{\text{SSH}/m}{\text{SSE}/(n-k)} = \frac{(\mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T [\mathbf{U}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-} \mathbf{U}^T]^{-1} \mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\beta}}/m}{\text{SSE}/(n-k)} \quad (2.14)$$

dengan $\text{SSH} = (\mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T [\mathbf{U}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-} \mathbf{U}^T]^{-1} \mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan jumlah kuadrat hipotesis. Karena matriks $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ tidak memiliki invers, maka digunakan *generalized inverse* untuk pengujian fungsi *estimable*. Selanjutnya, $\text{SSE} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$ merupakan jumlah kuadrat galat, m adalah jumlah fungsi *estimable* yang diuji, n adalah jumlah observasi, dan k adalah rank matriks desain. Statistik uji tersebut mengikuti distribusi F dengan derajat bebas m dan $n - k$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 yang bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data pada penelitian ini merupakan data simulasi yang dibangkitkan menggunakan program SAS. Data simulasi tersebut digunakan untuk mengevaluasi estimator parameter baru pada model Rancangan Bujur Sangkar Latin (*Latin Square*) *non full rank* dengan pendekatan reparameterisasi.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan menggunakan metode studi pustaka, yaitu melalui kajian teoritis terhadap buku-buku referensi yang relevan dengan topik penelitian serta karya ilmiah berupa jurnal. Selain itu, penelitian ini juga dilengkapi dengan simulasi menggunakan *dataset* pada *software* SAS untuk memperdalam pemahaman terhadap topik yang diteliti. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk memperoleh estimasi tak bias melalui reparameterisasi model *non full rank* pada Rancangan Bujur Sangkar Latin (*Latin Square Design*) adalah sebagai berikut:

1. Menyusun model matematis Rancangan Bujur Sangkar Latin (*Latin Square Design*) berukuran 4×4 , dimana setiap baris dan kolom memiliki 4 pengamatan serta setiap perlakuan memiliki 4 kali ulangan yang muncul satu kali pada setiap

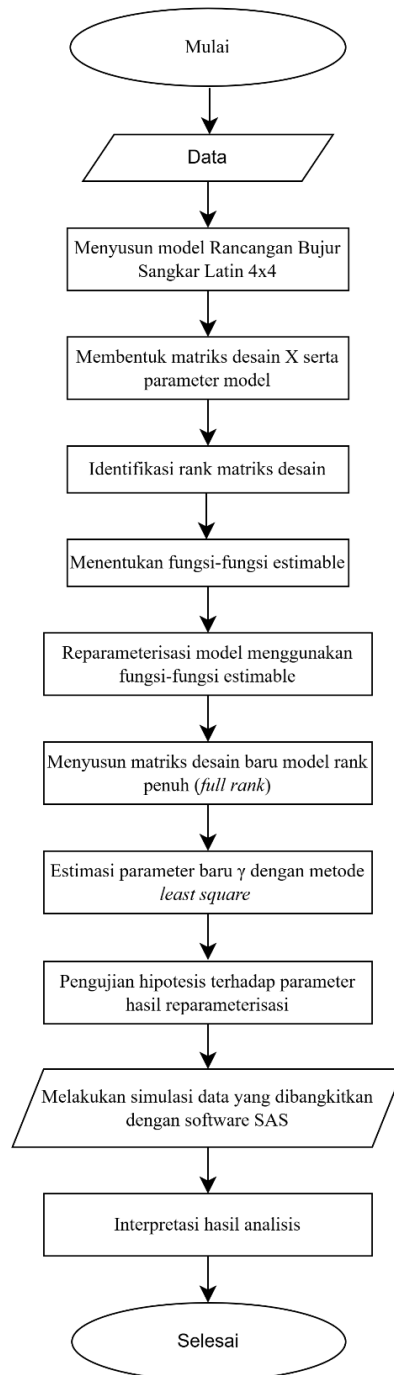
baris dan kolom yang dinyatakan sebagai

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \rho_k + \varepsilon_{ijk}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, r \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

2. Membentuk struktur matriks desain X pada model linear $Y = X\beta + \varepsilon$ dengan $\beta = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)^T$ yang disusun menggunakan variabel indikator (*dummy variable*). Nilai 1 menunjukkan adanya efek baris, kolom, atau perlakuan, sedangkan nilai 0 menunjukkan tidak adanya efek baris, kolom, atau perlakuan pada Rancangan Bujur Sangkar Latin.
3. Mengidentifikasi sifat *non full rank* pada matriks desain X dan singularitas matriks $X^T X$.
4. Menentukan fungsi *estimable* dengan Operasi Baris Elementer (OBE) dan membentuk himpunan fungsi *estimable* yang bebas linear.
5. Melakukan reparameterisasi model *non full rank* dengan parameter baru γ yang terdiri dari fungsi-fungsi *estimable*.
6. Menyusun matriks desain baru hasil reparameterisasi yang memiliki peringkat penuh (*full rank*).
7. Melakukan estimasi parameter hasil reparameterisasi menggunakan metode *Least Squares* sehingga diperoleh nilai penduga $\hat{\gamma} = (Z^T Z)^{-1} Z^T y$.
8. Melakukan pengujian hipotesis pengaruh perbedaan antar efek baris, efek kolom, dan efek perlakuan terhadap respon.
9. Melakukan simulasi dengan parameter baru γ berdasarkan data studi kasus yang dibangkitkan menggunakan *software* SAS dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 1. Menyusun struktur data Rancangan Bujur Sangkar Latin (RBSL).
 2. Membangkitkan data menggunakan SAS.
 3. Membentuk matriks desain X (*non full rank*).
 4. Menentukan fungsi *estimable* dengan OBE.
 5. Menyusun matriks reparameterisasi U .

6. Membentuk matriks desain baru \mathbf{Z} (*full rank*).
7. Membentuk model baru $\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$
8. Mengestimasi parameter $\boldsymbol{\gamma}$ dengan metode *least square*.
9. Melakukan simulasi berulang sebanyak 1000 kali dengan varians $\sigma = 0.1, 0.5, 1, 2$.
10. Mengevaluasi sifat penduga.

Berikut *Flowchart* metode penelitian



Gambar 3.1 Diagram alir metode penelitian

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian Reparameterisasi Model *Non Full Rank* pada Rancangan Bujur Sangkar Latin (*Latin Square*) yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Fungsi-fungsi *estimable* untuk reparameterisasi pada model *Non Full Rank* yang diperoleh sebagai berikut

$$\gamma = \begin{pmatrix} \mu + \alpha_4 + \tau_4 + \rho_4 \\ \alpha_1 - \alpha_4 \\ \alpha_2 - \alpha_4 \\ \alpha_3 - \alpha_4 \\ \tau_1 - \tau_4 \\ \tau_2 - \tau_4 \\ \tau_3 - \tau_4 \\ \rho_1 - \rho_4 \\ \rho_2 - \rho_4 \\ \rho_3 - \rho_4 \end{pmatrix}$$

2. Pendugaan parameter γ pada model hasil reparameterisasi diberikan oleh

$$\hat{\gamma} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y}$$

3. Hasil simulasi menunjukkan bahwa rata-rata penduga parameter serta nilai bias yang dihasilkan pada berbagai kondisi nilai varians galat (σ) relatif kecil dan mendekati nol. Maka dapat disimpulkan bahwa penduga *Least Square* terhadap parameter hasil reparameterisasi bersifat tak bias, karena tidak menunjukkan kecenderungan *overestimate* maupun *underestimate* secara sistematis.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., & Rorres, C. 2010. *Elementary Linear Algebra*. 10th Edition. John Wiley & Sons, Hoboken.
- Fan, J., Du, W., Jiang, Y., & Zhang, C. 2022. Parameter Estimation and Application of Non Full Rank Linear Regression Model. *Advances in Educational Technology and Psychology*, **6**(7), 9–13.
- Hallin, M. 2013. Markov Theorem. *In Encyclopedia of Environmetrics*. 2nd Edition. John Wiley & Sons, West Sussex.
- Hinkelmann, K., & Kempthorne, O. 2008. *Design and Analysis of Experiments, Volume 1: Introduction to Experimental Design*. 2nd Edition. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Khuri, A. I. 2009. *Linear Model Methodology*. 1st Edition. Chapman & Hall/CRC, USA.
- Montgomery, D. C. 2013. *Design and Analysis of Experiments*. 8th Edition. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Moolman, W. H. (2020). The Graeco-Latin Square and Hyper Graeco-Latin Square Designs. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, **6**(8), 211–220.
- Myers, R. H., & Milton, J. S. 1991. *A First Course in the Theory of Linear Statistical Models*. 1st Edition. PWS-Kent Publishing Company, Boston.

- Rencher, A. C., & Schaalje, G. B. 2008. *Linear Models in Statistics*. 2nd Edition. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Saleem, W., & Jaber, A. G. 2022. Reparameterization and the conditional inverse of a balanced factorial experiment with three factors. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, **13**(1), 3733–3747.
- Szczepańska-Álvarez, A. 2023. Noted on parametric functions in the linear model. *Biometrical Letters*, **60**(2), 211–215.
- Usman, M., & Warsono. 2009. *Teori model linear dan aplikasinya*. Sinar Baru Algensindo, Bandung.
- Zimmerman, D. L. 2020. *Linear Model Theory: With Examples and Exercises*. 1st Edition. Springer Nature Switzerland AG, Switzerland.