

**BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF KAKI SERIBU DAN
BARBELNYA**

(Skripsi)

Oleh

**WANDA TRECY RANINTA SIMARMATA
2217031007**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

**BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF KAKI SERIBU DAN
BARBELNYA**

WANDA TRECY RANINTA SIMARMATA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

EDGE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF MILLIPEDE GRAPHS AND IT'S BARBELL

By

Wanda Trency Raninta Simarmata

Edge locating chromatic number of G denoted by $\chi'_L(G)$ is the smallest integer m such that G has a coloring of m edges locating. In this research discusses edge locating chromatic number of millipede graphs $(L_n \odot \overline{K_r})$ and barbell millipede graphs $(B_{L_n \odot \overline{K_r}})$. The results are $\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r}) = r + 3$ for $n = 2, r \geq 2$ and $\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r}) = m$ with $\binom{m}{r+3} \geq 2n - 4$ for $n \geq 3, r \geq 2$. Next, for barbell millipede graphs $\chi'_L(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) = m$, where $\binom{m}{r+3} \geq 2(2n - 3)$ for $n, r \geq 2$.

Keywords: Edge locating chromatic number, millipede graphs, barbell millipede graphs.

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI GRAF KAKI SERIBU DAN BARBELNYA

Oleh

Wanda Trency Raninta Simarmata

Bilangan kromatik lokasi sisi dari G dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$, merupakan bilangan terkecil m sehingga G memiliki pewarnaan m lokasi sisi. Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan kromatik lokasi sisi graf kaki seribu ($L_n \odot \overline{K_r}$) dan graf barbel kaki seribu ($B_{L_n \odot \overline{K_r}}$). Hasil yang diperoleh adalah $\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r}) = r + 3$ untuk $n = 2, r \geq 2$ dan $\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r}) = m$ dengan $\binom{m}{r+3} \geq 2n - 4$ untuk $n \geq 3, r \geq 2$. Selanjutnya, untuk graf barbel kaki seribu $\chi'_L(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) = m$ dengan $\binom{m}{r+3} \geq 2(2n - 3)$ untuk $n, r \geq 2$.

Kata kunci: Bilangan kromatik lokasi sisi graf, graf kaki seribu, graf barbel kaki seribu.

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI
GRAF KAKI SERIBU DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : **Wanda Trexy Raninta Simarmata**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031007**


Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing


Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 197604112000122001


Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP. 199311062019032018

**2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung Matematika**


Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

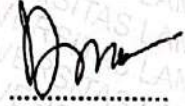
MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.



Sekretaris : Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.



**Penguji
Bukan Pembimbing : Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 19 Mei 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Wanda Trecey Raninta Simarmata**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031007**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI SISI
GRAF KAKI SERIBU DAN BARBELNYA**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 19 Mei 2026

Penulis



Wanda Trecey Raninta Simarmata

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Wanda Trece Raninta Simarmata yang lahir di Kalirejo pada tanggal 5 Mei 2004. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak F. Simarmata dan Ibu J. Sinaga.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Fransiskus Kalirejo, Lampung Tengah pada tahun 2008 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Penulis melanjutkan pendidikan di SD Fransiskus Kalirejo, Lampung Tengah pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Kalirejo, Lampung Tengah pada tahun 2016-2019, dan melanjutkan pendidikan di SMA Negeri 1 Kalirejo, Lampung Tengah pada tahun 2019-2022. Pada tahun 2022 melalui jalur SNMPTN, Penulis diterima menjadi mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung.

Pada akhir tahun 2024, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Bina Marga dan Bina Kontruksi Provinsi Lampung selama 40 hari sampai dengan akhir Januari 2025 sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu matematika di dunia kerja. Pada bulan Juli 2025 penulis melaksanakan KKN (Kuliah Kerja Nyata) di Desa Sumber Rejo, Kemiling, Kota Bandar Lampung, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

”Segala perkara dapat kutanggung didalam Dia yang memberi kekuatan”
(Filipi 4:13)

”Jangan takut akan masa depanmu. Dia yang berjanji, Dia juga yang akan menepati
tepat pada waktunya”
(Ulangan 31:6)

”(5) Percayalah kepada TUHAN dengan segenap hatimu, dan janganlah bersandar
kepada pengertianmu sendiri, (6) Akuilah Dia dalam segala lakumu, maka Ia akan
meluruskan jalanmu”
(Amsal 3:5-6)

”Karena masa depan sungguh ada, dan harapanmu tidak akan hilang”
(Amsal 23:18)

’It’s not always easy, but that’s life. Be strong because there are better days ahead”
(Marklee)

”You should believe in yourself and don’t let anyone bring you down”
(Marklee)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas kasih karunia dan berkatNya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan bahagia, saya persembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Bapak dan Mamaku Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku untuk semua pengorbanan, motivasi, doa dan nasihat serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi dan arahan serta ilmu yang berharga.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji Syukur kepada Tuhan Yesus Kristus, karena berkat dan kasih karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Kaki Seribu dan Barbelnya" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran dan doa sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, saran dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan saran kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Kedua orang tua penulis Bapak F. Simarmata dan Mama J. Sinaga, dua orang yang sangat berjasa dalam hidup penulis, dua orang yang selalu

mengusahakan anak pertamanya ini menempuh pendidikan setinggi-tingginya. Penulis percaya doa-doa mereka lah yang menyelamatkan dan menuntun penulis melewati masa-masa sulit. Tidak lupa kepada seluruh keluarga besar yang senantiasa memberikan doa dan dukungan.

7. Adik-adik tercinta Welly Lovythama Simarmata dan Witha Juliana Simarmata yang selalu memberi dukungan dan semangat kepada penulis selama proses penyusunan skripsi.
8. Muhammad Khoirul Prasetio dan Kartika Chandra Kirana yang sudah menemani dan membersamai penulis selama masa perkuliahan.
9. Puone, Riahana, Mawar, Gebrina, Anisah, Vina dan Dinda yang sudah memberi semangat, dukungan dan membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi.
10. Mark Lee, Hwang Renjun, Lee Haechan, Na Jaemin, Lee Jenso, Zhong Chenle, dan Park Jisung yang telah menjadi penyemangat dan selalu mendukung penulis melalui karya-karyanya.
11. Diri saya sendiri terima kasih sudah kuat dan bertahan sejauh ini. Terima kasih untuk tidak menyerah sesulit apapun proses perkuliahan dan penyusunan skripsi ini. Skripsi ini mungkin tidak sempurna, tetapi proses ini menjadi pengalaman penuh makna dan pembelajaran pribadi yang mendalam. Apresiasi sebesar-besarnya karena telah bertanggung jawab menyelesaikan apa yang dimulai.
12. Semua pihak yang membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,

(Wanda Trency Raninta Simarmata)

DAFTAR ISI

SANWACANA	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	iii
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	2
1.3 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Teori Dasar dan Kelas-Kelas Graf	4
2.2 Graf Kaki Seribu dan Barbelnya	6
2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi	7
III METODE PENELITIAN	11
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	11
3.2 Metode Penelitian	11
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	13
4.1 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Kaki Seribu	13
4.2 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi Graf Barbel Kaki Seribu	20
V KESIMPULAN DAN SARAN	28
5.1 Kesimpulan	28
5.2 Saran	28
DAFTAR PUSTAKA	29

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf dengan 6 titik dan 9 Sisi	4
2.2	Graf tangga L_5	5
2.3	Graf lengkap K_4	6
2.4	Komplemen graf lengkap K_4	6
2.5	Graf hasil operasi korona $L_2 \odot \overline{K_2}$	6
2.6	Graf barbel kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_2}$	7
4.1	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_4}$. .	13
4.2	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_5}$. .	14
4.3	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf kaki seribu $L_3 \odot \overline{K_4}$. .	16
4.4	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf kaki seribu $L_3 \odot \overline{K_5}$. .	17
4.5	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf barbel kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_4}$	21
4.6	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf barbel kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_5}$	23
4.7	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf barbel kaki seribu $L_3 \odot \overline{K_4}$	24
4.8	Contoh pewarnaan lokasi sisi minimum graf barbel kaki seribu $L_3 \odot \overline{K_5}$	25

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori Graf merupakan salah satu cabang matematika yang muncul dari ide Leonhard Euler pada tahun 1736 melalui permasalahan Jembatan Konigsberg yang mempertanyakan kemungkinan untuk melewati tujuh jembatan yang menghubungkan empat daratan tanpa melintasi jembatan yang sama lebih dari satu kali dan kembali ke tempat semula. Euler menyimpulkan bahwa hal itu akan mungkin terjadi jika semua titik berderajat genap (Sugeng dkk., 2014).

Pewarnaan graf adalah salah satu pembahasan penting dalam teori graf. Konsep ini bermula dari permasalahan *Four Color Problem* yang mempertanyakan kemungkinan untuk mewarnai semua peta hanya dengan empat warna sehingga daerah yang bersebelahan tidak memiliki warna yang sama (Formanowicz & Tanas., 2012). Dari permasalahan ini lahirlah konsep bilangan kromatik, yaitu banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk dapat mewarnai semua titik-titik pada graf tanpa ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama (West, 2001).

Konsep bilangan kromatik semakin berkembang, pada tahun 2002 Chartrand dkk, mengenalkan konsep bilangan kromatik lokasi. Bilangan ini menunjukkan banyaknya warna minimum yang dibutuhkan untuk pewarnaan lokasi dengan ketentuan setiap titik memiliki kode warna yang berbeda. Notasi bilangan kromatik lokasi adalah $\chi_L(G)$ (Asmiati, 2023). Penelitian yang mengkaji bilangan kromatik lokasi sudah banyak dilakukan. Penelitian mengenai graf pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi 3 hingga $n - 1$ kecuali $n - 2$ diteliti oleh Chartrand dkk. (2003). Asmiati dkk. (2011) mendapatkan bilangan kromatik lokasi

amalgamasi graf bintang tak seragam, Asmiati dkk. (2012) untuk graf kembang api, Asmiati (2017) untuk n amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh lintasan, Sudarsana dkk. (2022) untuk m – shadow dari graf terhubung, Hamzah dkk. (2024) untuk operasi korona dari lintasan dan siklus.

Pada penelitian graf barbel, Asmiati dkk. (2018) mendapatkan bilangan kromatik lokasi untuk graf barbel graf lengkap dan Petersen diperumum. Selanjutnya Asmiati dkk. (2021) untuk graf barbel lintasan, Irawan dan Asmiati (2025) untuk operasi barbel tertentu pada graf pizza dan subdivisinya, Asmiati dkk. (2025) untuk graf siklus belah dan operasi barbelnya, Sawitri dkk. (2025) untuk graf bunga mawar dan operasi barbelnya.

Pada tahun 2024, Korivand dkk. mengenalkan konsep bilangan kromatik lokasi sisi. Bilangan ini menunjukkan banyaknya warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan lokasi sisi, dengan ketentuan setiap titik pada graf memiliki kode warna yang berbeda. Notasi untuk bilangan kromatik lokasi sisi adalah $\chi'_L(G)$. Menurut Korivand dkk. (2024) telah didapatkan bilangan kromatik lokasi sisi graf lintasan, graf siklus, graf bipartit lengkap, graf lengkap dan bilangan kromatik lokasi sisi untuk pohon.

Graf kaki seribu merupakan graf hasil operasi korona graf tangga L_n dengan komplemen graf lengkap $\overline{K_r}$. Graf kaki seribu merupakan modifikasi graf tangga dengan menambahkan sebanyak r lintasan pada setiap titik graf tangga dengan panjang satu, dinotasikan dengan $L_n \odot \overline{K_r}$ (Nurvazly dkk., 2022).

Kajian mengenai bilangan kromatik lokasi sisi masih relatif baru dan belum ada peneliti yang mengkaji graf kaki seribu ($L_n \odot \overline{K_r}$), oleh karena itu penelitian ini berfokus untuk membahas bilangan kromatik lokasi sisi graf kaki seribu dan barbelnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf kaki seribu dan barbelnya.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu:

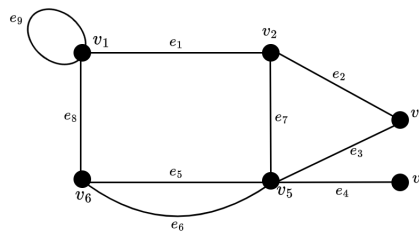
1. Memberikan pemahaman mengenai konsep bilangan kromatik lokasi sisi pada graf, terutama pada graf kaki seribu.
2. Menjadi referensi bagi pembaca atau sebagai literatur tambahan untuk penelitian lanjutan di masa yang akan datang.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Dasar dan Kelas-Kelas Graf

Beberapa konsep dasar dari graf pada subbab ini diambil dari Deo (1989) dan Sugeng dkk. (2014). Graf merupakan himpunan pasangan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik-titik di G , $V(G) \neq 0$ dan $E(G)$ menyatakan sisi (*edge*). Banyaknya titik di graf G disebut orde, sedangkan banyaknya sisi yang menempel di titik v disebut derajat, dinotasikan dengan $d(v)$. Jika u dan v merupakan titik pada graf G yang dihubungkan oleh sisi e maka u dan v disebut bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik u dan v dikatakan menempel dengan sisi e , begitupun sisi e menempel dengan titik u dan v . Himpunan tetangga dari suatu titik v di G , dinotasikan $N(v)$.



Gambar 2.1 Contoh graf dengan 6 titik dan 9 Sisi

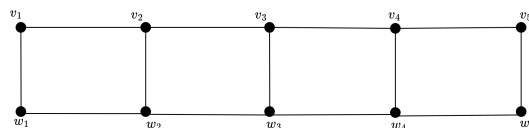
Gambar 2.1 merupakan graf $G(V, E)$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$. Pada Gambar 2.1 titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_6 sedangkan titik v_1 dan v_2 menempel dengan sisi e_1 , begitupun sisi e_1 menempel pada titik v_1 dan v_2 . Himpunan tetangga dari titik v_1 adalah $N(v_1) = \{v_2, v_6\}$. *Loop* adalah sisi yang menghubungkan satu

titik ke dirinya sendiri. Sisi ganda adalah dua atau lebih sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama. Daun (*pendant*) adalah titik yang berderajat 1. Derajat setiap titik pada Gambar 2.1 sebagai berikut: $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = d(v_6) = 3$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 1$, $d(v_5) = 5$.

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dengan setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya pada graf. Contoh *walk* dari titik v_1 ke v_4 berdasarkan Gambar 2.1 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3 - e_3 - v_5 - e_5 - v_6 - e_6 - v_5 - e_4 - v_4$. Lintasan (*path*) adalah *walk* yang melewati titik-titik yang berbeda, dengan titik yang berbeda tersebut dilewati tepat satu kali pada graf. Contoh lintasan pada Gambar 2.1 adalah $v_4 - e_4 - v_5 - e_6 - v_6 - e_8 - v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3$. Graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan di antara setiap dua titik di G .

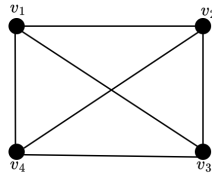
Misalkan G_1 dan G_2 merupakan 2 graf, hasil kali kartesian $G_1 \times G_2$ adalah graf yang himpunan titiknya $V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi dua titik u_1u_2 dan v_1v_2 bertetangga di $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$ (Oellermann & Peters., 2007).

Graf tangga merupakan graf hasil kali kartesian dari graf lintasan P_2 dan P_n yang dinotasikan dengan $P_2 \times P_n$. Notasi dari graf tangga adalah L_n . Diberikan graf tangga L_5 sebagai berikut:



Gambar 2.2 Graf tangga L_5

Graf lengkap adalah graf sederhana dengan setiap titiknya saling bertetangga. Graf sederhana merupakan graf yang tidak mempunyai *loop* dan sisi ganda. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n . Banyaknya sisi graf lengkap dengan n titik adalah $n(n - 1)/2$. Contoh graf lengkap dengan 4 titik dapat dilihat pada Gambar 2.3.



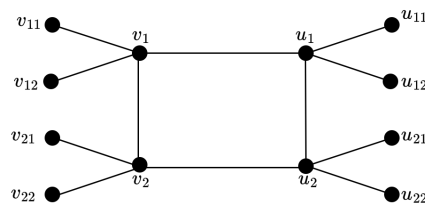
Gambar 2.3 Graf lengkap K_4

Komplemen graf dari graf G dinotasikan dengan \overline{G} . Graf \overline{G} memiliki himpunan titik di G , tetapi dua titik u dan v bertetangga di \overline{G} jika dan hanya jika tidak bertetangga di G . Contoh komplemen graf lengkap $\overline{K_4}$ dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Komplemen graf lengkap K_4

Operasi korona dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dari duplikat graf H sebanyak titik yang ada di graf G . Duplikat graf H dinyatakan dengan $H_i = i = 1, 2, 3, \dots, |V(G)|$ dengan $|V(G)|$ merupakan banyaknya titik di G . Setiap titik ke- i di $V(G)$ bertetangga dengan setiap titik di H_i (Frucht & Harary., 1970). Contoh graf operasi korona $L_2 \odot \overline{K_2}$ dapat dilihat pada Gambar 2.5.



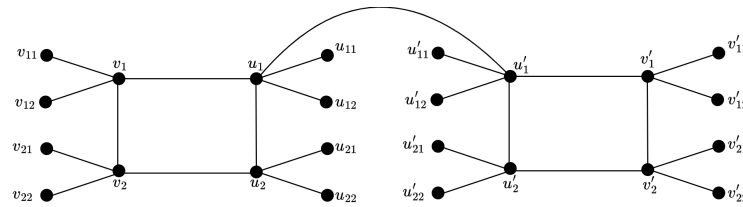
Gambar 2.5 Graf hasil operasi korona $L_2 \odot \overline{K_2}$

2.2 Graf Kaki Seribu dan Barbelnya

Graf kaki seribu merupakan graf hasil operasi korona graf tangga L_n dengan komplemen graf lengkap $\overline{K_r}$. Graf kaki seribu merupakan modifikasi graf tangga

dengan menambahkan sebanyak r lintasan pada setiap titik graf tangga dengan panjang satu, dinotasikan dengan $L_n \odot K_r$ (Nurvazly dkk., 2022). Contoh gambar graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_2}$ dapat dilihat pada Gambar 2.5.

Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf dengan satu sisi sebagai jembatan (Ihwan & Rahmawati., 2014). Graf barbel kaki seribu merupakan graf yang diperoleh dengan menggandakan graf kaki seribu ($L_n \odot \overline{K_r}$) dan menghubungkan kedua graf tersebut dengan suatu jembatan. Graf barbel kaki seribu dinotasikan dengan $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$. Gambar 2.6 adalah contoh graf barbel kaki seribu $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$ dengan u_1 dan u'_1 sebagai jembatan.



Gambar 2.6 Graf barbel kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_2}$

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Sisi

Misalkan G adalah graf terhubung sederhana dan c adalah pewarnaan sisi. Misalkan $c : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ merupakan pewarnaan sisi dari G , dengan sisi yang bertetangga di G memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai sisi-sisi G sehingga setiap dua sisi bertetangga memiliki warna berbeda disebut bilangan kromatik sisi, dinotasikan dengan $\chi'(G)$.

Diberikan definisi bilangan kromatik lokasi sisi yang diambil dari Korivand dkk. (2024). Misalkan $\pi : (C_1, C_2, \dots, C_k)$ merupakan partisi pada G yang diinduksi oleh pewarnaan c . Misalkan $v \in V(G)$, kode warna titik, $c_\pi(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$, dengan $d(v, C_i) = \min d(v, e) | e \in C_i, 1 \leq i \leq k$ dan $d(v, e) = \min d(v, x), d(v, y) | e = xy$. Pewarnaan c disebut pewarnaan lokasi sisi di G jika semua titik di G mempunyai kode warna titik yang berbeda. Bilangan kromatik lokasi sisi $\chi'_L(G)$ adalah k terkecil sedemikian sehingga c merupakan pewarnaan lokasi sisi.

Teorema 2.3.1 Misalkan G graf terhubung dengan derajat maksimal $\Delta(G)$, maka $\chi'_L(G) \geq \Delta(G)$.

Bukti. Misalkan $u \in V(G)$ dengan $d(u) = \Delta(G)$, maka semua sisi yang bertetangga dengan u diberi warna berbeda. Jadi, $\chi'_L(G) \geq \Delta(G)$. ■

Proposisi 2.3.1 (Korivand dkk., 2024)

Untuk bilangan bulat positif n ,

$$\chi'_L(P_n) \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 3, \\ 3, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$. Untuk $n = 3$, akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf P_3 . Karena pada graf P_3 terdapat titik yang berderajat 2, sehingga berdasarkan Teorema 2.3.1 $\chi'_L(P_3) \geq 2$. Andaikan c merupakan pewarnaan lokasi sisi graf P_3 menggunakan 2 warna dengan kelas-kelas warna yaitu $\Pi = \{C_1, C_2\}$ dengan $C_1 = \{v_1 v_2\}$, $C_2 = \{v_2 v_3\}$. Sehingga diperoleh kode warna sebagai berikut: $c_\pi(v_1) = (0, 1)$, $c_\pi(v_2) = (0, 0)$, $c_\pi(v_3) = (1, 0)$. Karena setiap titik pada graf tersebut memiliki kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi sisi. Akibatnya, $\chi'_L(P_3) \leq 2$. Jadi $\chi'_L(P_3) = 2$.

Untuk $n \geq 4$, akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf P_n . Karena pada graf P_n terdapat titik yang berderajat 2, sehingga berdasarkan Teorema 2.3.1 $\chi'_L(P_n) \geq 2$. Andaikan c merupakan pewarnaan lokasi sisi graf P_n menggunakan 2 warna, maka $c_\pi(v_2) = c_\pi(v_3)$, kontradiksi. Oleh karena itu, $\chi'_L(P_n) \geq 3$. Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi graf P_n . Misalkan c merupakan pewarnaan lokasi sisi menggunakan 3 warna dengan kelas-kelas warna yaitu $\Pi = \{C_1, C_2, C_3\}$. Pewarnaan sisi didefinisikan sebagai berikut:

$$c(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 2, & i \geq 2 \text{ genap}, \\ 3, & i \geq 3 \text{ ganjil}. \end{cases}$$

Sehingga diperoleh kode warna untuk semua titik berbeda. Karena setiap titik pada graf tersebut memiliki kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi sisi. Akibatnya, $\chi'_L(P_n) \leq 3$. Jadi $\chi'_L(P_n) = 3$ untuk $n \geq 4$. ■

Contoh 2.3.1 Diberikan contoh graf hasil korona L_2 dan $\overline{K_2}$ dengan notasi $L_2 \odot \overline{K_2}$. Akan ditentukan bilangan kromatik lokasi sisi dari graf tersebut. Notasi titik graf

$L_2 \odot \overline{K_2}$ dapat dilihat pada Gambar 2.5.

Pertama, akan ditentukan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi sisi graf $L_2 \odot \overline{K_2}$. Karena pada graf $L_2 \odot \overline{K_2}$ terdapat titik yang berderajat 4 yaitu titik v_i dan u_i untuk $i = 1, 2$, sehingga berdasarkan Teorema 2.3.1 $\chi'_L(L_2 \odot \overline{K_2}) \geq 4$. Andaikan c merupakan pewarnaan lokasi sisi graf kaki seribu $L_2 \odot \overline{K_2}$ menggunakan 4 warna, maka kombinasi warna yang menempel pada titik v_i akan sama dengan titik u_i . Akibatnya $c_\pi(v_i) = c_\pi(u_i)$, kontradiksi. Oleh karena itu, $\chi'_L(L_2 \odot \overline{K_2}) \geq 5$.

Selanjutnya, menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi pada graf $L_2 \odot \overline{K_2}$. Misalkan c merupakan pewarnaan sisi menggunakan 5 warna pada $L_2 \odot \overline{K_2}$, dengan kelas-kelas warna yaitu $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ dengan $C_1 = \{v_1v_{12}\}$, $C_2 = \{u_1u_{12}, u_2v_2\}$, $C_3 = \{u_1u_2, v_1v_2\}$, $C_4 = \{v_1v_{12}, v_2v_{21}, u_2u_{21}\}$, $C_5 = \{u_1u_{12}, u_2u_{22}, v_2v_{22}\}$. Sehingga diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_\pi(u_1) &= (0, 1, 0, 0, 0), & c_\pi(v_1) &= (0, 0, 0, 0, 1), \\ c_\pi(u_2) &= (1, 0, 0, 0, 0), & c_\pi(v_2) &= (0, 0, 0, 1, 0), \\ c_\pi(u_{11}) &= (1, 2, 1, 0, 1), & c_\pi(v_{11}) &= (1, 0, 1, 1, 2), \\ c_\pi(u_{12}) &= (1, 2, 1, 1, 0), & c_\pi(v_{12}) &= (1, 1, 1, 0, 2), \\ c_\pi(u_{21}) &= (2, 1, 1, 0, 1), & c_\pi(v_{21}) &= (0, 1, 1, 2, 1), \\ c_\pi(u_{22}) &= (2, 1, 1, 1, 0), & c_\pi(v_{22}) &= (1, 1, 1, 2, 0). \end{aligned}$$

Karena setiap titik pada graf tersebut memiliki kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi sisi. Akibatnya $\chi'_L(L_2 \odot \overline{K_2}) \leq 5$. Jadi $\chi'_L(L_2 \odot \overline{K_2}) = 5$.

Contoh 2.3.2 Diberikan contoh graf barbel kaki seribu $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$ dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf tersebut. Notasi titik pada graf $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$ dapat dilihat pada Gambar 2.6.

Pertama akan ditentukan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi sisi graf $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$. Karena pada graf $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$ terdapat titik berderajat 5 yaitu titik u_1 dan u'_1 , sehingga berdasarkan Teorema 2.3.1 $\chi'_L(B_{L_2 \odot \overline{K_2}}) \geq 5$. Andaikan c pewarnaan lokasi sisi graf barbel kaki seribu $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$ menggunakan 5 warna, maka kombinasi warna sisi yang menempel pada titik u_1 akan sama dengan titik u'_1 . Akibatnya $c_\pi(u_1) = c_\pi(u'_1)$, kontradiksi. Oleh karena itu $\chi'_L(B_{L_2 \odot \overline{K_2}}) \geq 6$.

Misalkan c pewarnaan sisi pada graf $B_{L_2 \odot \overline{K_2}}$ menggunakan 6 warna dengan kelas-kelas warna yaitu $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ dengan $C_1 = \{u_1u_2, v_1v_{11},$

$v_2v_{21}, v'_1v'_2, u'_1u'_{11}, u'_2u'_{22}\}$, $C_2 = \{v_1v_{12}, v_2v_{22}, u_2u_{21}, u_1u'_1, v'_1v'_{11}, v'_2v'_{21}\}$, $C_3 = \{v_1v_2, u_1u_{11}, u_2u_{22}, u'_1u'_2, v'_1v'_{12}, v'_2v'_{22}\}$, $C_4 = \{u_1u_{12}\}$, $C_5 = \{v_1u_1, u'_1v'_1, u'_2u'_{22}\}$, $C_6 = \{v_2u_2, u'_1u'_{12}, u'_2v'_2\}$. Sehingga diperoleh kode warna titik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c_\pi(u_1) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1), & c_\pi(v_1) &= (0, 0, 0, 1, 0, 1), \\
c_\pi(u_2) &= (0, 0, 0, 1, 1, 0), & c_\pi(v_2) &= (0, 0, 0, 2, 1, 0), \\
c_\pi(u'_1) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0), & c_\pi(v'_1) &= (0, 0, 0, 2, 0, 1), \\
c_\pi(u'_2) &= (0, 1, 0, 2, 0, 0), & c_\pi(v'_2) &= (0, 0, 0, 3, 1, 0), \\
c_\pi(u_{11}) &= (1, 1, 0, 1, 1, 2), & c_\pi(v_{11}) &= (0, 1, 1, 2, 1, 2), \\
c_\pi(u_{12}) &= (1, 1, 1, 0, 1, 2), & c_\pi(v_{12}) &= (1, 0, 1, 2, 1, 2), \\
c_\pi(u_{21}) &= (1, 0, 1, 2, 2, 1), & c_\pi(v_{21}) &= (0, 1, 1, 3, 2, 1), \\
c_\pi(u_{22}) &= (1, 1, 0, 2, 2, 1), & c_\pi(v_{22}) &= (1, 0, 1, 3, 2, 1), \\
c_\pi(u'_{11}) &= (0, 1, 1, 2, 1, 1), & c_\pi(v'_{11}) &= (1, 0, 1, 3, 1, 2), \\
c_\pi(u'_{12}) &= (1, 1, 1, 2, 1, 0), & c_\pi(v'_{12}) &= (1, 1, 0, 3, 1, 2), \\
c_\pi(u'_{21}) &= (0, 2, 1, 3, 1, 1), & c_\pi(v'_{21}) &= (1, 0, 1, 4, 2, 1), \\
c_\pi(u'_{22}) &= (1, 2, 1, 3, 0, 1), & c_\pi(v'_{22}) &= (1, 1, 0, 4, 2, 1).
\end{aligned}$$

Karena setiap titik memiliki kode warna yang berbeda maka c merupakan pewarnaan lokasi sisi. Akibatnya $\chi'_L(B_{L_2 \odot \overline{K_2}}) \leq 6$. Jadi $\chi'_L(B_{L_2 \odot \overline{K_2}}) = 6$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung pada tahun ajaran 2025/2026.

3.2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini dilakukan beberapa langkah yaitu:

1. Langkah-langkah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ adalah:
 - a. Membentuk graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ untuk $n, r \geq 2$.
 - b. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi sisi graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ untuk $n, r \geq 2$ dengan merujuk Teorema 2.3.1.
 - c. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi pada graf kaki seribu $L_n \odot \overline{K_r}$ untuk $n, r \geq 2$. Mengkonstruksikan pewarnaan yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi sisi dengan memperhatikan struktur grafnya. Pewarnaan sisi dimulai dari sisi bagian badan dengan warna terkecil sehingga mendapatkan kelas warna dan pewarnaan minimum pada sisi-sisi graf yang memenuhi persyaratan lokasi sisi dan dilanjutkan ke sisi bagian kaki.
 - d. Jika batas atas $\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r}) \leq x$ dan batas bawah $\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r}) \geq x$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasi sisi yaitu $\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r}) = x$.
 - e. Merumuskan hasil yang diperoleh dalam satu pernyataan matematika.

- f. Membuktikan hasil yang diperoleh dari langkah e .
2. Langkah-langkah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sisi graf barbel kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$ adalah:
- Membentuk graf barbel kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$ untuk $n, r \geq 2$.
 - Menentukan batas bawah graf barbel kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$ untuk $n, r \geq 2$, dengan batas bawah dari graf barbel kaki seribu sekurang-kurangnya sama dengan batas bawah graf kaki seribu.
 - Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi sisi pada graf barbel kaki seribu $B_{L_n \odot \overline{K_r}}$ untuk $n, r \geq 2$. Mengkonstruksikan pewarnaan yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi sisi dengan memperhatikan struktur grafnya. Pewarnaan sisi dimulai dari sisi bagian badan dengan warna terkecil sehingga mendapatkan kelas warna dan pewarnaan minimum pada sisi-sisi graf yang memenuhi persyaratan lokasi sisi dan dilanjutkan ke sisi bagian kaki.
 - Jika batas atas $\chi'_L(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) \leq x$ dan batas bawah $\chi'_L(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) \geq x$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasi sisi yaitu $\chi'_L(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) = x$.
 - Merumuskan hasil yang diperoleh dalam satu pernyataan matematika.
 - Membuktikan hasil yang diperoleh dari langkah e .

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan dan dibuktikan bilangan kromatik lokasi sisi graf kaki seribu $\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r})$ untuk $r \geq 2$ adalah

$$\chi'_L(L_n \odot \overline{K_r}) = \begin{cases} r + 3, & n = 2; \\ m \text{ dengan } \binom{m}{r+3} \geq 2n - 4, & n \geq 3. \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk graf barbel kaki seribu

$$\chi'_L(B_{L_n \odot \overline{K_r}}) = m$$

$$\text{dengan } \binom{m}{r+3} \geq 2(2n - 3), n \geq 2.$$

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan bilangan kromatik lokasi sisi pada jenis graf lain atau variasi graf barbel dengan pola penghubung yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Asmiati., Assiyatun, H., and Baskoro, R. T.,. (2011). Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB Journal of Science*. 43A(1),1-8.
- Asmiati., Baskoro, E.T., Assiyatun, H., Suprijanto, D., Simanjuntak, R., and Uttunggadewa, S. (2012). The Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 63(1), 11-23.
- Asmiati. (2017). Locating Chromatic Number of certain Amalgantion of Stars. 13(2), 115-21.
- Asmiati, Yana, I.K.S.G., and Yulianti, L. (2018). On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs. *International Journal of Mathematics and Computer Science*. 1-5.
- Asmiati, Damayanti, M., and Yulianti, L. (2021). On the Locating Chromatic Number of Barbell Shadow Path Graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*. 5(2), 82.
- Asmiati. (2023). *Graf Aplikasinya pada Lintasan Terpendek*. Yogyakarta. Matematika CV. Graha Ilmu.
- Asmiati.,Prawinasti, K., Damayanti, M and Yulianti, L.(2025). The Locating Chromatic Number of (k,n) split Cycle Graph and Its Barbell Operation.*Electronic Journal of Graph Theory and Applications*.13(2),271-280.
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., and Zhang, P. (2002). Locating Chromatic Number of Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl* 36, 89-101.
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., and Zhang, P. (2003). Graphs of order n with Locating-Chromatic Number $n - 1$. *Discrete Mathematics*. 269(1-3), 65-79.

- Deo, N., (1989). *Graph Theory With Application To Engineering and Computer Science*. Prentice- Hall of India Private Limited.
- Formanowicz, P and Tanas, K. A survey of graph coloring – its types, methods and applications. *Foundations of Computing and Decision Sciences*. 37(3), 223–238.
- Frucht, R and Harary, F. (1970). On the Corona of Two Graphs. *Aequationes mathematicae*. 4(3), 322-325.
- Hamzah, N., Asmiati and Amansyah, W. D., (2024). Locating Chromatic Number for Corona Operation of Path P_n and Cycle C_m ($m = 3,4$). *Indonesian Journal of Combinatorics*. b(2), 127-135.
- Ihwan, M. D., and Rahmawati. (2014). Kajian Bilangan Clique Graph Gear G_n dan Barbel B_n . *Gamatika*. (5(1)), 39-50.
- Irawan, A and Asmiati., (2025). The Locating Chromatic Number for Certain Barbell Operation on Pizza Graph and Its Subdivision. *Jurnal Matematika UNAND*.14(3), 293-303.
- Korivand, M., Mojdeh, D. A., Baskoro, E. T., and Erfanian, A. (2024). Edge-locating Coloring of Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 12(1) (2024), 55-73.
- Nurvazly, D. E., Chasanah, S. L., and Wiranto, A. R. (2022). Variations of Graceful Labelling of Subgraph of Milipede Graph. *AIP Conference Proceedings*. 2563(1), 050018.
- Oellermann, O.R., and Peters-Fransen, J. (2007). The Strong Metric Dimension of Graphs and Digraphs. *Discrete Appl. Math*. 155, 336-364.
- Sawitri, R., Amelia, L., Asmiati, and Nurvazly, D. E. (2025) Locating Chromatic Number for Rose Graphs and Barbell Operation. *Eigen Mathematics Journal*. 8(1), 111-122.
- Sudarsana, I. W., Susanto, F and Musdalifah, S., (2022). The Locating Chromatic Number for m-shadow of a Connected Graph. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 10(2), 289-601.

Sugeng, K. A., Slamet and Silaban, D. R., (2014) *Teori Graf dan Aplikasinya*. Departemen FMIPA. Universitas Indonesia.

West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory (2nd ed.)*. Prentice Hall.