ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIRS DENGAN PENGARUH VAKSINASI DAN IMIGRASI PADA PENYAKIT *PNEUMONIA*

(Skripsi)

Oleh

RAHMA WAHYUNI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

ABSTRACT

STABILITY ANALYSIS OF A PNEUMONIA SEIRS MODEL INCORPORATING VACCINATION AND IMMIGRATION

By

RAHMA WAHYUNI

Pneumonia is a lung infectious disease that remains a significant public health concern, particularly among children. Vaccination is one of the preventive measures that can reduce disease transmission, while immigration may contribute to its spread. This study aims to develop and analyze an SEIRS mathematical model of pneumonia transmission incorporating the effects of vaccination and immigration. The model is formulated as a system of nonlinear differential equations and analyzed by determining equilibrium points, calculating the basic reproduction number (R_0) using the Next Generation Matrix method, and examining stability through the Jacobian matrix and the Routh–Hurwitz criterion. The analysis shows that the model has both disease-free and endemic equilibrium points. Numerical simulations yield $R_0 = 0{,}361$ for the disease-free condition and $R_0 = 1{,}192$ and $R_0 = 0{,}394$ for endemic conditions. The results indicate that the disease disappears when $R_0 < 1$ and persists when $R_0 > 1$. Furthermore, vaccination reduces the number of infected individuals and helps the system reach a stable state despite the presence of immigration.

Keywords: Pneumonia, SEIRS Model, Vaccination, Immigration, Stability

ABSTRAK

ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIRS DENGAN PENGARUH VAKSINASI DAN IMIGRASI PADA PENYAKIT *PNEUMONIA*

Oleh

RAHMA WAHYUNI

Pneumonia merupakan penyakit infeksi paru-paru yang masih menjadi masalah kesehatan masyarakat, terutama pada anak-anak. Vaksinasi merupakan salah satu upaya pencegahan yang dapat mengurangi penyebaran penyakit, sedangkan imigrasi berpotensi meningkatkan penyebarannya. Penelitian ini bertujuan untuk membentuk dan menganalisis model matematika SEIRS penyebaran penyakit pneumonia dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi. Model dibentuk dalam sistem persamaan diferensial nonlinier dan dianalisis melalui penentuan titik kesetimbangan, perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) menggunakan metode *Next Generation Matrix*, serta analisis kestabilan menggunakan matriks Jacobian dan kriteria Routh–Hurwitz. Hasil analisis menunjukkan bahwa model memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Simulasi numerik menghasilkan nilai $R_0 = 0{,}361$ pada kondisi bebas penyakit serta $R_0 = 1{,}192$ dan $R_0 = 0{,}394$ pada kondisi endemik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penyakit akan menghilang ketika $R_0 < 1$dan akan bertahan dalam populasi ketika $R_0 > 1$. Selain itu, vaksinasi mampu menurunkan jumlah individu terinfeksi dan membantu sistem mencapai kondisi stabil meskipun terdapat pengaruh imigrasi.

Kata Kunci: Pneumonia, Model SEIRS, Vaksinasi, Imigrasi, Kestabilan

ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIRS DENGAN PENGARUH VAKSINASI DAN IMIGRASI PADA PENYAKIT *PNEUMONIA*

Oleh

RAHMA WAHYUNI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2026

Judul Skripsi : **ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIRS DENGAN PENGARUH VAKSINASI DAN IMIGRASI PADA PENYAKIT *PNEUMONIA***

Nama Mahasiswa : *Rahma Wahyuni*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1917031002

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP.19700831 199903 1 002	NIP. 19720227 199802 1 001

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
FMIPA Universitas Lampung

Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP.197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**

Sekertaris : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **25 Mei 2026**

SURAT PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Rahma Wahyuni

Nomor Pokok Mahasiswa : 1917031002

Jurusan : Matematika

Judul Skripsi : **ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIRS DENGAN PENGARUH VAKSINASI DAN IMIGRASI PADA PENYAKIT *PNEUMONIA***

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila dikemudian hari hasil penelitian atau tugas akhir saya merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku. Semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya tulis ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 04 Juni 2026
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
10000
E33ANX404686961

Rahma Wahyuni

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Rahma Wahyuni yang lahir pada tanggal 04 Maret 2001 dari pasangan Bapak Sarmin dan Ibu Siti Kun Barkah di Bandar Lampung, Provinsi Lampung. Penulis merupakan anak bungsu dari empat bersaudara.

Penulis menempuh pendidikan di Sekolah Dasar Negeri (SDN) 3 Labuhan Ratu pada tahun 2007-2013, Sekolah Menengah Negeri (SMP) 19 Bandarlampung pada tahun 2013-2016, dan Sekolah Menengah Atas Negeri (SMAN) 15 Bandarlampung pada tahun 2016-2019. Pada tahun 2019, penulis terdaftar menjadi mahasiswi Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN.

Selama menjadi mahasiswi, penulis aktif dalam mengikuti organisasi kampus yaitu menjadi anggota UKM-F Natural Universitas Lampung. Pada bulan Januari 2022, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Sumur Putri, Kecamatan Teluk Betung Selatan, Kota Bandar Lampung sebagai bentuk pengabdian mahasiswa dan menjalankan Tri Dharma Perguruan Tinggi. Pada Juni 2022, penulis juga melaksanakan Kerja Praktik di Dinas Ketahanan Pangan Tanaman Pangan dan Holtikultura Provinsi Lampung sebagai bentuk penerapan ilmu yang telah diperoleh selama kuliah.

KATA INSPIRASI

“Allah menciptakan manusia dalam keadaan tidak mengetahui apa pun dan menganugerahi pendengaran, penglihatan, dan hati agar bersyukur.”
(Q.S. An-Nahl: 78)

“"Dan katakanlah (Muhammad), 'Ya Tuhanku, tambahkanlah ilmu kepadaku.’”
(Q.S Thaha: 114)

“No matter how dark or lonely your feelings may be right now, it is never too late to rise again and find hope.”
(Ateez)

“I may not be the best, but I can always do my best. Making an effort is something that is always within my control.”
(San)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdullilah**,** puji dan syukur kepada Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya dalam setiap langkah yang ku tempuh sehingga segala bentuk proses yang ditemui dapat dilalui dengan penuh makna. Tak lupa pula dengan rasa syukur dan bahagia saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak Sarmin dan Ibu Siti Kun Barkah

Terimakasih kepada orang tuaku atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, motivasi, doa, dan ridho di setiap langkah penulis sehingga saya mampu sampai pada titik ini. Terimakasih atas pengertian dan pelajaran berharga yang telah diberikan kepada anakmu sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi orang lain.

Dosen Pembimbing dan Dosen Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Teman dan Sahabat

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasi, doa, dan dukungan saat suka maupun duka.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Kestabilan Model SEIRS dengan Pengaruh Vaksinasi dan Imigrasi pada Penyakit *Pneumonia*" sebagai salah satu persyaratan untuk meraih gelar strata satu (S1) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penyelesaian karya ilmiah ini tidak lepas dari bantuan, kerja sama, bimbingan dan doa dari berbagai pihak penulis dapat menyelesaikan laporan ini. Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang senantiasa membimbing dan membantu, memberikan saran dan masukan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan serta saran dan masukan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembahas atas ketersediaannya untuk membahas serta memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Abah, Mamak, Kak Sakim, Kak Sadeli, Kak Sarbini dan seluruh keluarga

besar yang selalu memberikan kasih sayang, dukungan, nasihat, motivasi serta doa kepada penulis.

8. Teruntuk sahabat terbaik Zea, Lisna, Siti dan Manda. Terimakasih atas bantuan, semangat, dan kebersamaannya selama ini.
9. Teman-teman Matematika 2019, terima kasih atas kebersamaannya.
10. Seluruh pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 03 Juni 2026

Penulis

Rahma Wahyuni

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Pneumonia atau yang biasa dikenal dengan radang paru-paru merupakan jenis penyakit yang disebabkan oleh infeksi pada *parenkim* paru-paru. *Pneumonia* bisa disebabkan oleh infeksi virus, bakteri, atau jamur. SARS-CoV-2 yang menyebabkan COVID-19 adalah salah satu jenis virus yang bisa menyebabkan *pneumonia*. Beberapa virus yang umum menyebabkan *pneumonia* adalah virus influenza, *respiratory syncytial virus* (RSV), dan SARS-CoV-2. Sementara jenis bakteri yang umum menyebabkan pneumonia adalah *Streptococcus pneumonia*. Berdasarkan Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, pneumonia paling sering terjadi pada saat bayi dan anak-anak. *Pneumonia* juga rawan menyerang orang dewasa yang berusia di atas 65 tahun dan orang dengan masalah kesehatan yang sudah diderita sebelumnya. *Pneumonia* terjadi akibat menghirup bibit penyakit di udara, kuman di tenggorokan terhisap masuk ke paru-paru, melalui luka, atau percikan cairan sewaktu berbicara, bersin dan batuk.

Pneumonia merupakan salah satu penyebab kematian tertinggi pada anak-anak di seluruh dunia. Data dari *World Health Organization* (WHO) menyebutkan bahwa pada tahun 2019, sebanyak 740.180 anak-anak meninggal akibat *pneumonia* dengan laporan kasus sebanyak 450 juta setiap tahunnya. Gejala penyakit ini cukup bervariasi. Gejala umum yang dialami oleh penderita yaitu batuk berdahak, demam, sesak napas, nyeri dada ketika bernapas atau batuk, mual dan muntah, nafsu makan menghilang, serta tubuh yang mudah lelah. Oleh karena itu, diperlukan upaya pencegahan dan penelitian lebih lanjut guna menanggulangi *pneumonia* khususnya di Indonesia.

Cara pencegahan penyakit ini salah satunya adalah dengan vaksinasi. Vaksinasi merupakan penyuntikan/pemberian vaksin dalam rangka meningkatkan kekebalan tubuh terhadap suatu penyakit. Vaksin yang diberikan ialah antigenik yang dapat menghasilkan sebuah kekebalan aktif terhadap sebuah penyakit. Vaksin *pneumonia* juga dapat mengurangi gejala berat dan komplikasi serius dari penyakit tersebut.

Migrasi atau perpindahan penduduk dari satu tempat ke tempat lain merupakan suatu fenomena yang sering terjadi di suatu tempat. Hal ini dapat menyebabkan terjadinya penyebaran penyakit *pneumonia* yang dapat masuk atau keluar dari suatu tempat dan sangat perlu diperhatikan.

Dewasa ini, ilmu pengetahuan memberikan peranan penting dalam bidang kesehatan, terutama dalam mencegah penyebaran suatu penyakit. Bidang matematika pun turut serta memberikan peranan dalam menganalisis dan memodelkan suatu permasalahan. Penyebaran suatu penyakit dapat dimodelkan menjadi suatu model matematika yang dapat merepresentasikan peristiwa di dunia nyata dalam pernyataan sistematis. Salah satu pemodelan matematika terhadap penyebaran suatu penyakit ialah dengan menggunakan model SEIR.

Model matematika penyebaran penyakit model SEIR telah banyak dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya. Contohnya penelitian yang dilakukan oleh Pramudito (2021) dengan judul *Model SEIR Penyakit COVID-19 dengan Adanya Migrasi dan Pemberian Vaksin,* begitu pun dengan penelitian model SEIR pada penyakit *pneumonia.* Seiring berjalannya waktu, model SEIR terhadap penyakit *pneumonia* mengalami perkembangan menjadi model SEIRS. Salah satunya adalah penelitian yang dilakukan oleh Side, dkk (2021) yang berjudul *Pemodelan Matematika SEIR Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi di Kota Makassar.* Penelitian ini membahas tentang penyebaran penyakit *pneumonia* pada balita dengan mengembangkan model SEIR dan adanya pengaruh vaksinasi. Penelitian model SEIR pada penyakit *pneumonia* juga dilakukan oleh Zhafran, dkk (2022) dengan judul *Model Matematika SEIRS Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi* di mana dalam penelitian ini mengembangkan asumsi individu yang sembuh tetapi rentan terjangkit kembali.

Berdasarkan penelitian di atas, peneliti akan membahas model matematika SEIRS pada penyakit *pneumonia* dengan pengaruh vaksinasi dam imigrasi. Pemodelan ini mengasumsikan bahwa individu yang sudah melakukan vaksinasi sebanyak tiga kali masih dapat tertular penyakit *pneumonia* dengan gejala tidak seberat yang belum melakukan atau belum lengkap vaksinasi, serta dengan adanya perpindahan penduduk yang masuk ke dalam populasi (imigrasi) dan imigrasi hanya ada pada kelas *Infected* (I).

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Mempelajari lebih lanjut model SEIRS pada penyakit *pneumonia* dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi.
2. Menganalisis kestabilan model SEIRS pada penyakit *pneumonia* dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan model matematika penyakit *pneumonia* dan penerapannya.

2. Mengetahui titik kesetimbangan model SEIRS pada penyakit *pneumonia* dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi.
3. Menambah wawasan terhadap penerapan model SEIRS pada penyakit *pneumonia*.
4. Mampu memprediksi bagaimana penyebaran *pneumonia* di masa yang akan datang.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan pada penelitian ini lebih terarah, maka batasan masalah pada penelitian adalah sebagai berikut:

1. Diasumsikan imigrasi hanya terjadi pada kelas *Infected* (I).
2. Individu yang sembuh (*Recovered)* baik sudah melakukan vaksin lengkap maupun belum lengkap dapat kembali menjadi individu rentan *(Susceptible)* karena menurunnya imun atau tidak menjaga kesehatan.
3. Vaksinasi dilakukan pada kelas rentan *(Susceptible).*
4. Model matematika yang digunakan pada penelitian ini merupakan modifikasi dari model matematika pada jurnal penelitian Zhafran, dkk (2022)

II. TINJAUAN PUSTAKA

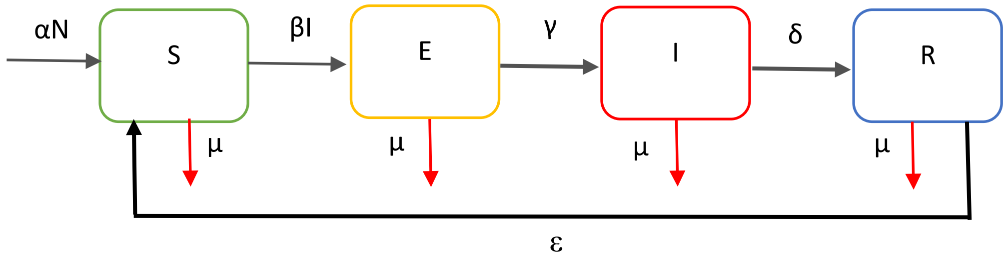
2.1 Model SEIRS

Penyebaran penyakit dapat dianalisis dengan menggunakan pemodelan matematika. Pemodelan matematika pada penyakit yang paling sederhana ialah model SIR yang dikemukakan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Populasi pada model penyebaran penyakit dibagi menjadi tiga kelas, yaitu jumlah orang yang sehat namun rentan terserang penyakit (S), jumlah orang yang terkena dan dapat menularkan penyakit (I), dan jumlah orang yang telah sembuh dari penyakit (R) (Pramudito, 2021).

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, model matematika SIR mengalami perkembangan menjadi model SEIR. Dalam model SEIR, populasi dikelompokkan dalam empat kelas yaitu kelompok individu yang rentan terjangkit atau *Susceptible* (S), kelompok individu laten (memiliki jeda waktu terinfeksi) atau *Exposed* (E), kelompok individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit atau *Infected* (I), dan kelompok individu yang telah sembuh dan kebal terhadap penyakit atau *Recoverred* (R). Model SEIR dapat digunakan dalam memodelkan penyakit yang memiliki waktu inkubasi (Side & Rangkuti, 2015).

Model matematika SEIR yang digunakan dalam memodelkan beberapa penyakit memiliki perkembangan di mana individu yang telah sembuh dapat kembali menjadi individu yang rentan terhadap penyakit yang dinamakan model matematika SEIRS. Pada penyakit *pneumonia*, model SEIR mengalami perkembangan menjadi model SEIRS dengan individu yang telah sembuh baik dengan vaksin lengkap atau belum lengkap dapat menjadi individu yang rentan kembali (Zhafran & Arnellis, 2022).

Berikut bentuk diagram kompartemen model SEIRS secara umum:



Gambar 1. Diagram Model Matematika SEIRS

Model SEIRS pada gambar di atas dapat dibentuk dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha N + \varepsilon R - \beta IS - \mu S \qquad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta IS - \gamma E - \mu E \qquad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - \delta I - \mu I \qquad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I - \mu R - \varepsilon R \qquad (4)$$

Dengan variabel sebagai berikut:

N : Total populasi

S : Jumlah individu yang rentan

E : Jumlah individu yang laten

I : Jumlah individu yang terinfeksi

R : Jumlah individu yang sembuh

α : Laju kelahiran

β : Laju perpindahan individu rentan menjadi individu laten

γ : Laju perpindahan individu laten menjadi individu terinfeksi

δ : Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh

μ : Laju kematian

ε : Laju perpindahan individu yang sembuh dapat menjadi rentan kembali

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial didefinisikan sebagai suatu sistem yang memuat *n* buah persamaan diferensial, dengan *n* buah fungsi yang tidak diketahui, di mana *n* adalah bilangan bulat positif yang lebih besar sama dengan dua.

Berikut merupakan bentuk umum dari suatu sistem *n* persamaan orde pertama:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{5}$$

Dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ ialah variabel bebas dan *t* ialah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, di mana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap *t* dan g_1 adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan *t* (Neuhauser, 2004).

2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Menurut (Anton & Rorres, 1998), jika *A* adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ pada R^n disebut vektor eigen dari *A* jika $A\boldsymbol{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$, yaitu:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{6}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ merupakan nilai eigen dari *A*. Sehingga untuk memperoleh nilai eigen dari matrikas *A* berordo $n \times n$, dapat dituliskan menjadi:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{7}$$

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

2.4 Matriks Jacobian

Diberikan $f = f_1, f_2, \dots, f_n$ dengan $f_1 \in C^1(E), i = 1,2,\dots,n$ matriks

$$J\big(f(x^*)\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$J\big(f(x^*)\big)$ merupakan matriks Jacobian dari f di titik x^* (Hale & Kocak, 1991).

2.5 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah jumlah rata-rata kasus individu terinfeksi yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa terinfeksinya dalam keseluruhan rentan atau s*usceptible* (Diekmann & Heesterbeek, 2000). Berikut beberapa kondisi yang akan terjadi saat menentukan R_0:

1. Jika $R_0 < 1$, maka hanya akan menginfeksi kurang dari satu individu rentan sehingga kemungkinan penyakit akan hilang dari populasi.
2. Jika $R_0 = 1$, maka individu terinfeksi akan menginfeksi tepat satu individu yang rentan (penyakit tetap ada).
3. Jika $R_0 > 1$, maka individu terinfeksi akan menginfeksi lebih dari satu individu yang rentan (penyakit bertambah banyak).

2.6 Titik Ekuilibrium dan Kestabilannya

Diberikan suatu bentuk sistem persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \qquad (10)$$

Sebuah titik (x_0, y_0) disebut sebagai titik kesetimbangan atau titik ekuilibrium dari sistem persamaan (10) apabila memenuhi syarat $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Titik ekuilibrium (x_0, y_0) adalah solusi dari sistem persamaan (10) yang bernilai konstan, karena $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ pada titik (x_0, y_0). Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik kesetimbangan (Edwards & Penney, 2001).

Kestabilan titik ekuilibrium dapat ditentukan dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu λ_i dengan $i = 1,2,3, \ldots, n$ yang diperoleh dari $\det(\lambda I - A) = 0$ dengan I adalah matriks identitas.

Dapat disimpulkan bahwa kestabilan titik ekuilibrium mempunyai dua perilaku, yaitu:

1. Stabil, jika:
   a. Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i < 0$ untuk semua *i*)
   b. Setiap komponen nilai eigen kompleks lebih kecil atau sama dengan nol ($Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua *i*)
2. Tidak stabil, jika:
   a. Setiap nilai eigen real adalah positif ($\lambda_i > 0$ untuk semua *i*)
   b. Setiap komponen nilai eigen kompleks lebih besar dari nol ($Re(\lambda_i) > 0$ untuk semua *i*) (Ihsan et al., 2021).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

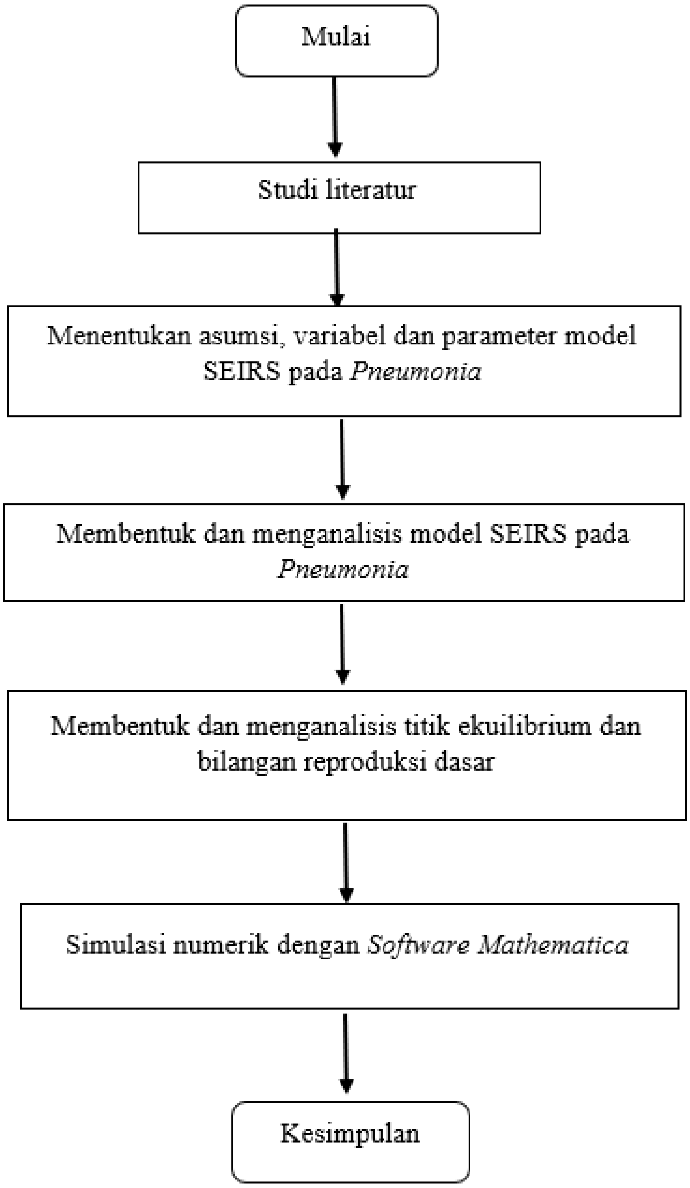
Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2023/2024 dengan tempat dilaksanakannya penelitian ini adalah di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

1. Melakukan studi literatur berkaitan dengan penyakit *pneumonia*.
2. Menentukan asumsi-asumsi, variabel, dan parameter yang berkaitan dengan model SEIRS dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi pada penyakit *pneumonia.*
3. Membentuk dan menganalisis model matematika SEIRS dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi pada penyakit *pneumonia*.
4. Menentukan titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar (R_0).
5. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium model SEIRS.
6. Melakukan simulasi numerik dengan menggunakan *Microsoft Excel* dan *Software Mathematica.*

Berikut merupakan gambaran diagram alir penelitian model SEIRS dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi pada penyakit *Pneumonia*:



Gambar 2. Diagram Alir Model SEIRS Penyakit *Pneumonia*

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari penelitian mengenai Model SEIRS dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi pada penyakit *pneumonia*, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika SEIRS dengan pengaruh vaksinasi dan imigrasi pada penyakit *pneumonia* adalah

$$\frac{dS}{dt} = \alpha N(1-\lambda) + \varepsilon R - (\beta I + \lambda + \mu)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta IS - (\mu + \gamma)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E + mN - (\mu + \sigma + \delta)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \lambda S - (\mu + \varepsilon)R$$

2. Titik kesetimbangan bebas penyakitnya yaitu:

$$(S, E, I, R) = \left(\frac{\alpha N(1-\lambda)(\mu+\varepsilon)}{\mu(\lambda+\mu+\varepsilon)}, 0, 0, \frac{\lambda\alpha N(1-\lambda)}{\mu(\lambda+\mu+\varepsilon)}\right)$$

3. Titik kesetimbangan endemik penyakitnya yaitu:

$$(S^*, E^*, I^*, R^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha N(1-\lambda)(\mu+\varepsilon) + \varepsilon\delta I^*}{(\mu+\varepsilon)(\beta I^* + \lambda + \mu) - \varepsilon\lambda} \\ \dfrac{mN(\mu+\gamma)}{(\mu+\sigma+\delta)(\mu+\gamma) - \gamma\beta S^*} \\ \dfrac{\beta I^* S^*}{\mu+\gamma} \\ \dfrac{\delta I^* + \lambda S^*}{\mu+\varepsilon} \end{pmatrix}$$

4. Bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta S\gamma}{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma+\delta)}$$

5. Berdasarkan simulasi numerik yang telah dilakukan, didapatkah hasil bilangan reproduksi dasar (R_0) pada saat bebas penyakit yaitu $R_0 = 0{,}361$ dan bilangan reproduksi dasar (R_0) pada saat endemik diperoleh $R_0 = 1{,}192$ dan $R_0 = 0{,}394$.
6. Grafik yang dihasilkan dari simulasi numerik titik kesetimbangan endemik pada simulasi kedua dan ketiga menunjukkan bahwa penyakit akan tetap ada dalam jangka waktu tertentu karena adanya imigrasi tetapi perlahan mengalami kestabilan karena dipengaruhi oleh vaksinasi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., & Rorres, C. (1998). *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga.

Diekmann, O., & Heesterbeek. (2000). *Mathematical Epidemilogy of Infectious Disease*. John Wiley and Son.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2001). *Differential Equation and Linear Algebra*. Prentice Hall Inc.

Hale, J. K., & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag.

Ihsan, H., Side, S., & Pagga, M. (2021). Pemodelan Matematika SEIRS pada Penyebaran Penyakit Malaria di Kabupaten Mimika. *Jmathcos (Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, *4*(1), 21–29.

Neuhauser, C. (2004). *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson Education.

Pramudito, M. S. P. (2021). Model SEIR Penyakit COVID 19 dengan Adanya Migrasi dan Pemberian Vaksin. *MATHunesa Jurnal Ilmiah Matematika*, *9*, 260–267.

Side, S., & Rangkuti. (2015). *Pemodelan Matematika dan Solusi Numerik untuk Penularan Demam Berdarah*. Perdana Publishing.

Zhafran, A. M., & Arnellis. (2022). Model Matematika SEIRS Penyebaran Penyakit Pneumonia pada Balita dengan Pengaruh Vaksinasi. *Journal of Mathematics UNP*, *7*, 121–127.