

**PENDEKATAN *JACKSON OPEN QUEUING NETWORK* UNTUK ANALISIS
SISTEM ANTRIAN *MULTI-NODE***

Skripsi

Oleh

**DWI ROSMAIDAH
NPM. 2217031110**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

**PENDEKATAN *JACKSON OPEN QUEUING NETWORK* UNTUK ANALISIS
SISTEM ANTRIAN *MULTI-NODE***

DWI ROSMAIDAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

JACKSON OPEN QUEUING NETWORK APPROACH FOR ANALYSIS OF MULTINODE QUEUING SYSTEMS

By

Dwi Rosmaidah

A multi-node service system can be modeled as a queuing network because customers can move between service centers within the system. This study aims to analyze the performance of the service system using the Jackson Network model. The data used are customer arrival rate, service rate, number of servers, and the probability of customer movement at each service node. The system is represented as a directed graph and analyzed with the assumption that customer arrivals follow a Poisson distribution, service times are exponentially distributed, the service discipline is First Come First Served (FCFS), and is in a steady-state condition. The effective arrival rate of each node is obtained through the flow balance equation which forms a system of linear equations. Next, calculations are carried out on system performance measures including utilization, average number of customers in the system, average queue length, and average customer waiting time. The results show that the Jackson Network model is able to represent customer flow in a multi-node service system and identify nodes that have the potential to become bottlenecks based on their utilization levels.

Keywords: Jackson Network, queuing network, steady-state, flow balance equation, system performance measures.

ABSTRAK

PENDEKATAN *JACKSON OPEN QUEUING NETWORK* UNTUK ANALISIS SISTEM ANTRIAN *MULTI-NODE*

Oleh

Dwi Rosmaidah

Sistem pelayanan *multi-node* dapat dimodelkan sebagai jaringan antrian karena pelanggan dapat berpindah antar pusat pelayanan dalam sistem. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kinerja sistem pelayanan menggunakan model *Jackson Network*. Data yang digunakan berupa data laju kedatangan pelanggan, laju pelayanan, jumlah pelayan, dan peluang perpindahan pelanggan pada setiap *node* pelayanan. Sistem direpresentasikan sebagai graf berarah dan dianalisis dengan asumsi kedatangan pelanggan mengikuti distribusi Poisson, waktu pelayanan berdistribusi eksponensial, disiplin pelayanan *First Come First Served* (FCFS), serta berada pada kondisi *steady-state*. Laju kedatangan efektif tiap *node* diperoleh melalui *flow balance equation* yang membentuk sistem persamaan linear. Selanjutnya dilakukan perhitungan ukuran kinerja sistem meliputi utilisasi, rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem, rata-rata panjang antrian, dan rata-rata waktu tunggu pelanggan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model *Jackson Network* mampu merepresentasikan aliran pelanggan pada sistem pelayanan *multi-node* serta mengidentifikasi *node* yang berpotensi menjadi *bottleneck* berdasarkan tingkat utilitasnya.

Kata kunci: *Jackson Network*, jaringan antrian, *steady-state*, *flow balance equation*, ukuran kinerja sistem.

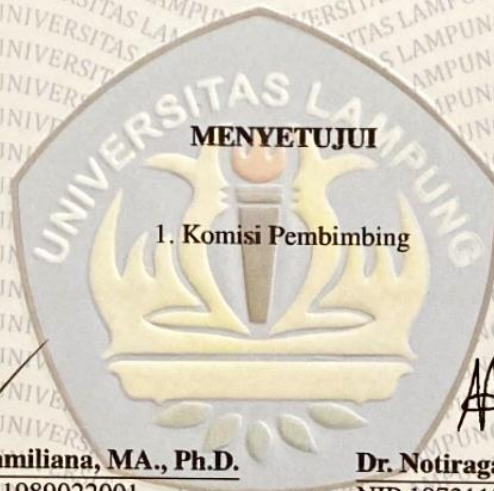
Judul Skripsi : **PENDEKATAN JACKSON OPEN QUEUING
NETWORK UNTUK ANALISIS SISTEM
ANTRIAN MULTI-NODE**

Nama Mahasiswa : **Dwi Rosmaidah**

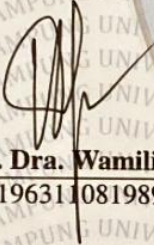
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031110**


Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

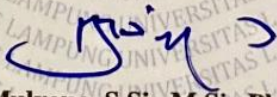


1. Komisi Pembimbing


Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.
NIP 196311081989022001


Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.
NIP 197311092000122001

2. Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama
FMIPA Universitas Lampung


Mulyono, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197406112000031002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.

Sekretaris : Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.

**Penguji
Bukan Pembimbing : Dr. Musjim Ansori, S.Si., M.Si**

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 11 Mei 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Dwi Rosmaidah**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031110**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Pendekatan Jackson Open Queuing Network
untuk Analisis Sistem Antrian Multi-node**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 11 Mei 2026

Penulis,


Dwi Rosmaidah

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Dwi Rosmaidah yang lahir di Cirebon pada tanggal 12 September 2004. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara.

Penulis memulai pendidikan formal di TK Tut Wuri Handayani pada tahun 2009 dan menyelesaikannya pada tahun 2010. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD IT Muhammadiyah pada tahun 2010 sampai dengan 2016. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Quran Darul Fattah pada tahun 2016 sampai dengan tahun 2019, dan menyelesaikan pendidikan di SMA Khadijah pada tahun 2022.

Pada tahun 2022, penulis diterima di program studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada awal tahun 2025, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, di Desa Payung Batu, Kecamatan Pubian, Kabupaten Lampung Tengah, sampai dengan Februari 2025. Selain itu, penulis juga melaksanakan Kerja Praktik di Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Cirebon pada Juni - Agustus 2025.

KATA INSPIRASI

Maka, ingatlah kepada-Ku, Aku pun akan ingat kepadamu. Bersyukurlah kepada-Ku dan janganlah kamu ingkar kepada-Ku

–*QS. Al-Baqarah: 152*–

Latihlah pikiranmu untuk melihat kebaikan dalam segala situasi

–*Marcus Aurelius*–

Hidupku terlalu pendek untuk tidak dibuat indah dan cantik

–*Nadin Amizah*–

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadiran Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.

Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Bapak dan Mama Tercinta

Terima kasih kepada kedua orang tuaku yang selalu mengusahakan kasih sayang yang penuh dan tidak pernah putus. Terima kasih atas banyaknya doa baik yang selalu dipanjatkan, segala pengorbanan yang dilakukan, serta dukungan yang diberikan dalam setiap langkah kehidupan.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih atas seluruh rasa aman dan kasih sayang, untuk setiap pelukan dan dukungan yang selalu terulur di setiap keadaan.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Pendekatan *Jackson Open Queuing Network* untuk Analisis Sistem Antrian *Multi-node*" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

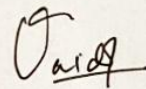
Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D. selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sepanjang proses penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 2 yang telah memberikan arahan serta dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan saran, kritik, serta evaluasi yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu Siti Laelatul Chasanah S.Pd., M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Kedua orang tua, keluarga, serta kerabat yang memberikan dukungan dan doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabat dan teman-teman yang tidak bisa disebutkan satu per satu, yang berhasil memberikan kehangatan dan warna dalam pertemanan penulis. Terima kasih untuk setiap dukungan, semangat, serta banyak hal baik yang diberikan.
9. Terakhir, untuk diri sendiri yang sudah berusaha untuk menyelesaikan tanggung jawab atas jalan yang sudah dipilih.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 11 Mei 2026



Dwi Rosmaidah

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	3
II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Teori Antrian	4
2.1.1 Pengertian Teori Antrian	4
2.1.2 Komponen Sistem Antrian	4
2.1.3 Notasi Sistem Antrian	5
2.1.4 Klasifikasi Sistem Antrian	6
2.1.5 Parameter Kinerja Sistem Antrian	8
2.1.6 Model-model Dasar Sistem Antrian	9
2.2 Jaringan Antrian	12
2.2.1 Pengertian jaringan antrian	12
2.2.2 Jenis-jenis jaringan	12
2.3 <i>Jackson Network</i>	14
2.3.1 Pengertian dan sejarah model Jackson	14
2.3.2 Asumsi dasar model Jackson	14
2.3.3 Persamaan Dasar dan Kondisi <i>Steady-State (Flow Balance Equation)</i>	15
2.3.4 Distribusi <i>Steady-State</i> dan <i>Product-Form Solution</i>	17
2.3.5 Ukuran kinerja setiap <i>node</i>	17
III METODE PENELITIAN	20
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	20
3.2 Metode Penelitian	20
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	22
4.1 Deskripsi Data	22
4.1.1 Struktur Sistem Antrian	22

4.1.2	Parameter Sistem	23
4.2	Analisis Aliran dan Kestabilan Sistem	26
4.2.1	Persamaan <i>Flow Balance Equation</i>	27
4.2.2	Analisis Kestabilan Sistem	29
4.3	Analisis Ukuran Kinerja Sistem Antrian	30
4.4	Pembahasan Umum Kinerja Sistem	33
V	KESIMPULAN DAN SARAN	34
5.1	Kesimpulan	34
5.2	Saran	34
	DAFTAR PUSTAKA	35

DAFTAR TABEL

2.1	Notasi dan Keterangan dalam Teori Antrian	6
4.1	Nilai Probabilitas Layanan Kesehatan	24
4.2	Parameter Awal Layanan Kesehatan	25
4.3	Nilai Probabilitas Kantor Imigrasi	26
4.4	Parameter Awal Kantor Imigrasi	26
4.5	Laju Kedatangan Efektif Layanan Kesehatan	28
4.6	Laju Kedatangan Efektif Kantor Imigrasi	29
4.7	Kestabilan Sistem Layanan Fasilitas Kesehatan	30
4.8	Kestabilan Sistem Kantor Imigrasi	30
4.9	Hasil Kinerja Sistem Layanan Fasilitas Kesehatan	31
4.10	Hasil Kinerja Sistem Kantor Imigrasi	32

DAFTAR GAMBAR

2.1	<i>Single queue single server</i>	7
2.2	<i>Multiserver</i>	7
2.3	<i>Multistage</i>	7
2.4	<i>Queuing Network</i>	8
2.5	<i>Open Queuing Network</i>	13
2.6	<i>Closed Queuing Network</i>	13
4.1	Struktur Sistem Antrian Layanan Kesehatan	23
4.2	Struktur Sistem Antrian Kantor Imigrasi	23

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Permasalahan efisiensi dalam sistem pelayanan dan produksi masih menjadi tantangan di berbagai sektor. Ketidakseimbangan antara kapasitas layanan dan permintaan sering memicu antrian yang berdampak pada penurunan produktivitas dan efisiensi operasional. Fenomena ini terjadi ketika laju kedatangan pelanggan melebihi kemampuan pelayanan pada waktu tertentu. Untuk mengoptimalkan penggunaan sumber daya, diperlukan pendekatan ilmiah melalui teori antrian sebagai salah satu aplikasi proses stokastik yang menganalisis hubungan antara kedatangan pelanggan, kapasitas pelayanan, dan kinerja sistem (Kandemir dan Cavas, 2007).

Model antrian sederhana seperti M/M/1 atau M/M/c hanya menggambarkan sistem dengan satu jenis layanan. Padahal, banyak sistem nyata terdiri atas beberapa jenis layanan (*multi-node*) yang saling berhubungan, seperti jaringan loket, server komputer, atau mesin produksi. Dalam sistem semacam ini, pelanggan dapat berpindah antar-*node* dengan probabilitas tertentu sebelum keluar dari sistem. Kompleksitas tersebut membuat model antrian tunggal tidak lagi cukup untuk menjelaskan dinamika pelayanan secara menyeluruh, sehingga diperlukan pendekatan jaringan antrian yang mampu merepresentasikan interaksi antar-*node* (Virtamo, 2005).

Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, digunakan pendekatan *Jackson Open Queueing Network* (JOQN) yang dikembangkan oleh Jackson (1957). Menurut Virtamo (2005), jaringan antrian ini terdiri dari sejumlah node dengan kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan eksponensial. Dalam kondisi *steady-state*, setiap *node* bersifat independen sehingga probabilitas keadaan jaringan dapat dinyatakan sebagai hasil kali probabilitas tiap *node*. Sifat independensi antar-node ini merupakan karakteristik utama dari model *Jackson Network* yang

menjadi dasar dalam penyusunan model antrian *multi-node*. Pendekatan ini memudahkan analisis parameter kinerja seperti utilisasi, waktu tunggu, dan jumlah pelanggan rata-rata di setiap *node*.

Beberapa penelitian terdahulu telah menerapkan *Jackson Open Queueing Network* (JOQN) untuk menganalisis sistem antrian dengan karakteristik *multi-node*. Al-Bahadili dkk. (2011) menggunakan model JOQN untuk mempelajari *multi-queue nodes network router* dan menunjukkan bahwa pendekatan ini efektif dalam mengevaluasi kinerja jaringan serta menghitung utilisasi setiap *node* melalui persamaan keseimbangan aliran. Arum dan Endrayanto (2020) menerapkan konsep serupa pada sistem antrian pasien di rumah sakit dengan menggunakan metode Moore–Penrose pseudo-inverse untuk menyelesaikan sistem persamaan linear pada model jaringan, dan hasilnya menunjukkan bahwa pendekatan JOQN mampu menggambarkan aliran pasien antarunit pelayanan secara akurat serta membantu mengidentifikasi titik kemacetan layanan. Faris dkk. (2020) menerapkan *Open Jackson Queueing Network* pada sistem antrian instalasi rawat jalan di Rumah Sakit Sidoarjo untuk meminimalkan waktu tunggu pasien melalui analisis pada empat workstation utama, yaitu registrasi, pra-konsultasi, konsultasi poli jantung, dan farmasi. Dengan penerapan model *Open Jackson Queueing Network*, penelitian ini berhasil menurunkan rata-rata waktu tunggu pasien dari 108 menit menjadi sekitar 12 menit per pasien. Penelitian oleh Alam dkk. (2021) mengusulkan sistem manajemen lalu lintas berbasis *open Jackson Queueing Network* yang dikombinasikan dengan optimisasi kuadratik untuk menentukan *service rate* optimal sehingga waktu tunggu kendaraan dalam jaringan jalan dapat diminimalkan secara signifikan. Selanjutnya Maswitha dan Sitorus (2025) menunjukkan bahwa penerapan model jaringan antrian Jackson pada sistem pelayanan Dinas Kependudukan dan Pencatatan Sipil Kabupaten Batubara mampu mengubah struktur antrian menjadi *multi channel–multi phase* dan menurunkan rata-rata waktu tunggu pengunjung dari 23 menit menjadi 9 menit. Secara keseluruhan, hasil-hasil penelitian tersebut memperkuat relevansi dan efektivitas model *Jackson Network* dalam menganalisis serta mengoptimalkan sistem pelayanan *multi-node* yang kompleks, baik pada konteks jaringan komputer maupun sistem pelayanan publik seperti rumah sakit.

Berdasarkan berbagai penelitian terdahulu, pendekatan *Jackson Open Queueing Network* (JOQN) memiliki potensi besar untuk menganalisis sistem pelayanan dengan struktur *multi-node*. Namun, sebagian besar studi masih terbatas pada konteks tertentu seperti jaringan komunikasi dan layanan rumah sakit, sehingga

penerapannya pada sistem pelayanan umum belum banyak dikaji. Penelitian ini berupaya mengadaptasi model *Jackson Network* untuk memformulasikan dan menganalisis sistem antrian *multi-node* secara matematis, dengan fokus pada pembangunan model berbasis keseimbangan aliran, penentuan laju kedatangan efektif di setiap node, serta evaluasi kinerja sistem melalui parameter seperti utilisasi, waktu tunggu, dan jumlah pelanggan rata-rata. Pendekatan ini diharapkan mampu memberikan pemahaman kuantitatif yang komprehensif terhadap perilaku sistem pelayanan *multi-node* dalam kondisi *steady-state*.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Menyusun model *Jackson Open Queueing Network* untuk sistem *multi-node*.
2. Menghitung ukuran kinerja sistem antrian *multi-node*, meliputi panjang antrian rata-rata, waktu tunggu, dan utilisasi server, dengan pendekatan *Jackson Open Queueing Network*

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Menjadi referensi ilmiah bagi penelitian lanjutan yang ingin mengembangkan atau memodifikasi model *Jackson Network* dengan asumsi dan parameter yang lebih kompleks.
2. Memberikan acuan bagi pengelola sistem layanan dalam merancang kapasitas dan alur pelayanan agar lebih efisien.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan diuraikan konsep dasar yang menjadi landasan teori untuk mendukung pembahasan pada bagian selanjutnya.

2.1 Teori Antrian

2.1.1 Pengertian Teori Antrian

Teori antrian merupakan cabang ilmu yang mempelajari perilaku sistem pelayanan yang melibatkan proses kedatangan pelanggan, waktu menunggu, serta mekanisme pemberian layanan. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh A. K. Erlang pada tahun 1909 melalui penelitiannya mengenai kapasitas saluran telekomunikasi di Denmark, yang kemudian menjadi dasar bagi pengembangan model matematis untuk menganalisis efisiensi pelayanan. Menurut Heizer dan Render (2011), teori antrian merupakan bagian penting dari kegiatan operasional yang berfungsi sebagai alat bantu bagi manajer dalam merancang dan mengendalikan proses pelayanan secara efisien.

2.1.2 Komponen Sistem Antrian

Gross dkk. (2008) menyatakan bahwa, sistem antrian merupakan mekanisme pelayanan yang melibatkan interaksi antara pelanggan dan fasilitas pelayanan yang mencakup proses kedatangan, penungguan, pelayanan, dan keberangkatan dari sistem. Secara umum, sistem antrian terdiri atas beberapa komponen utama, yaitu:

1. Pola Kedatangan Pelanggan (λ) (*Arrival Pattern*)

Menggambarkan distribusi waktu antar-kedatangan pelanggan yang bersifat acak (stokastik), biasanya menggunakan distribusi Poisson. Poin ini juga mencakup tipe kedatangan (individu/kelompok) serta perilaku pelanggan

seperti *balking* (batal masuk), *reneging* (keluar antrian), dan *jockeying* (pindah jalur).

2. Pola Pelayanan (μ) (*Service Pattern*)

Menjelaskan distribusi waktu pelayanan oleh server, baik secara tunggal maupun paralel. Kecepatan pelayanan bisa bersifat tetap (stasioner) atau berubah sesuai kondisi antrian (*state-dependent service*).

3. Disiplin Antrian

Menentukan urutan pelayanan pelanggan, seperti *first come, first serve* (FCFS), *last come, first served* (LCFS), *random selection for service* (RSS), atau berdasarkan prioritas. Sistem prioritas dapat berupa *preemptive* (menghentikan sementara pelayanan yang sedang berlangsung) atau *non-preemptive* (pelayanan diselesaikan terlebih dahulu).

4. Kapasitas Sistem

Menentukan batas maksimal pelanggan dalam sistem (tunggu + layanan). Pada *finite queue*, pelanggan akan ditolak jika kapasitas penuh, sedangkan pada *infinite queue*, jumlah pelanggan tidak dibatasi.

5. Jumlah Saluran Pelayanan

Menentukan jumlah fasilitas pelayanan yang tersedia. Sistem dapat berupa saluran tunggal (*single channel*) atau *multiserver* yang bekerja paralel menggunakan satu atau beberapa barisan antrian.

6. Tahapan Pelayanan

Menunjukkan jumlah proses yang harus dilalui pelanggan. *Single stage* hanya memiliki satu tahap layanan, sementara *multistage* terdiri dari beberapa tahap yang harus dilewati secara berurutan.

2.1.3 Notasi Sistem Antrian

Notasi Kendall merupakan konvensi standar dalam teori antrian yang digunakan untuk mengklasifikasikan karakteristik suatu sistem pelayanan. Notasi ini diperkenalkan oleh Kendall (1953) dalam bentuk $A/S/c$, di mana A menyatakan distribusi waktu antar kedatangan, S distribusi waktu pelayanan, dan c jumlah saluran pelayanan. Notasi tersebut selanjutnya dikembangkan menjadi $A/S/c/K/N/D$ dengan penambahan unsur kapasitas sistem (K), ukuran populasi sumber pelanggan (N), serta disiplin pelayanan (D).

Dalam praktiknya, notasi sering dituliskan dalam bentuk sederhana, seperti M/M/1, yang menunjukkan sistem dengan kedatangan Poisson, pelayanan eksponensial, dan satu pelayan. Apabila sistem diasumsikan memiliki kapasitas tak terbatas dan menggunakan aturan *first come, first served* (FCFS), maka parameter K dan D umumnya dihilangkan karena dianggap standar.

Tabel umum notasi antrian menurut Gross dkk. (2008):

Tabel 2.1 Notasi dan Keterangan dalam Teori Antrian

Simbol	Keterangan
M	Distribusi eksponensial (Markovian)
D	Distribusi deterministik
E_k	Distribusi Erlang dengan parameter k
G	Distribusi umum (<i>General Distribution</i>)
PH	Distribusi bertipe fase (<i>Phase Type Distribution</i>)
FCFS	<i>First Come, First Served</i>
LCFS	<i>Last Come, First Served</i>
RSS	<i>Random Selection for Service</i>
PR	<i>Priority Queue</i>

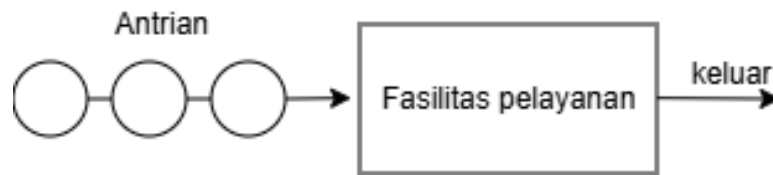
2.1.4 Klasifikasi Sistem Antrian

Klasifikasi sistem antrian memberikan kerangka untuk memahami variasi struktur sistem pelayanan berdasarkan karakteristik proses kedatangan, mekanisme pelayanan, serta konfigurasi saluran layanan. Setiap klasifikasi mencerminkan tingkat kompleksitas yang berbeda.

Gross dkk. (2008) mengklasifikasikan sistem antrian berdasarkan kompleksitas modelnya sebagai berikut:

1. Sistem Antrian Sederhana (*Single Queue, Single Server*)

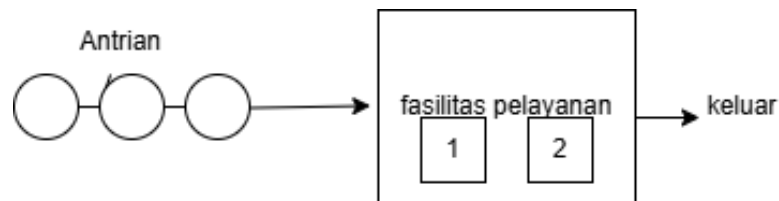
Pada sistem ini, hanya terdapat satu saluran antrian dan satu fasilitas pelayanan. Setiap pelanggan yang datang akan dilayani secara berurutan oleh satu pelayan. Model ini merupakan bentuk paling dasar dari sistem antrian dan sering digunakan untuk menggambarkan proses pelayanan sederhana seperti loket pembayaran tunggal atau kasir di minimarket kecil.



Gambar 2.1 *Single queue single server*
(Sumber: Widiyanto, 2019)

2. Sistem Multiserver (*Multi-channel Queue*)

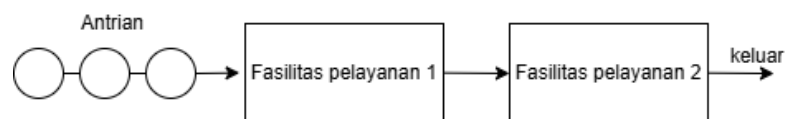
Sistem ini memiliki satu baris antrian, tetapi dilayani oleh beberapa pelayan secara paralel. Setelah menunggu dalam satu antrian, pelanggan akan dilayani oleh salah satu pelayan yang kosong terlebih dahulu.



Gambar 2.2 *Multiserver*
(Sumber: Widiyanto, 2019)

3. Sistem Multistage (*Multistage Queue*)

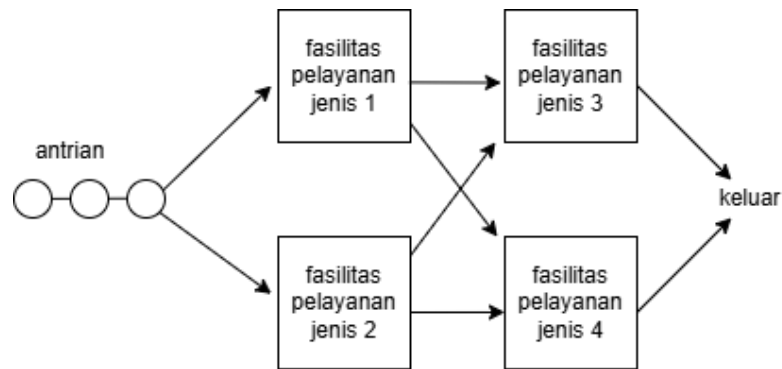
Dalam sistem ini, pelanggan harus melalui beberapa tahap pelayanan secara berurutan sebelum keluar dari sistem. Setiap tahap memiliki fasilitas pelayanan tersendiri.



Gambar 2.3 *Multistage*
(Sumber: Widiyanto, 2019)

4. Sistem Jaringan Antrian (*Queueing Networks*)

Sistem ini terdiri dari beberapa node atau titik pelayanan yang saling terhubung. Pelanggan dapat berpindah dari satu node ke node lainnya sesuai dengan kebutuhan proses layanan.



Gambar 2.4 *Queuing Network*
(Sumber: Widiyanto, 2019)

2.1.5 Parameter Kinerja Sistem Antrian

Parameter kinerja sistem antrian digunakan untuk menilai efektivitas dan efisiensi suatu sistem pelayanan. Parameter ini menggambarkan seberapa baik sistem mampu menyeimbangkan antara tingkat kedatangan pelanggan dan kemampuan pelayanan yang tersedia. Karena sebagian besar proses antrian bersifat stokastik, ukuran kinerja biasanya dinyatakan dalam bentuk nilai harapan atau rata-rata (Gross dkk. 2008).

Adapun beberapa parameter utama yang umum digunakan antara lain sebagai berikut (Gross dkk. 2008):

1. L (Rata-rata entitas dalam sistem)
Merupakan jumlah rata-rata pelanggan yang berada dalam sistem, baik yang sedang menunggu maupun yang sedang dilayani. Nilai ini menunjukkan tingkat kepadatan sistem secara keseluruhan.
2. L_q (Rata-rata jumlah antrian)
Menunjukkan jumlah rata-rata pelanggan yang sedang menunggu untuk dilayani. Parameter ini menjadi indikator langsung tingkat kemacetan antrian.
3. W (Rata-rata waktu dalam sistem)
Adalah waktu rata-rata yang dihabiskan pelanggan di dalam sistem, termasuk waktu menunggu dan waktu pelayanan.
4. W_q (Rata-rata waktu tunggu dalam antrian)
Menggambarkan waktu rata-rata pelanggan menunggu sebelum memperoleh pelayanan. Nilai ini penting dalam menilai kenyamanan pelanggan atau efisiensi sistem.

5. ρ (Utilisasi)

Menyatakan tingkat pemanfaatan fasilitas pelayanan, yaitu perbandingan antara tingkat kedatangan pelanggan (λ) dan kapasitas pelayanan sistem (μ). Secara matematis,

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \quad (2.1.1)$$

di mana s adalah jumlah pelayan. Kondisi $\rho < 1$ menandakan sistem berada dalam keadaan stabil (*steady state*), sedangkan $\rho \geq 1$ menunjukkan sistem cenderung tidak seimbang dan antrian dapat terus bertambah.

6. P_0 (Probabilitas sistem kosong)

Merupakan probabilitas bahwa tidak terdapat pelanggan di dalam sistem atau semua pelayan dalam keadaan menganggur. Nilai P_0 mencerminkan seberapa sering sistem berada pada kondisi tanpa aktivitas pelayanan. Semakin besar nilai P_0 , semakin rendah tingkat kesibukan sistem.

Hubungan antara parameter-parameter tersebut dijelaskan melalui Hukum *Little* (*Little's Law*), yang menyatakan bahwa:

$$L = \lambda W \quad (2.1.2)$$

dan

$$L_q = \lambda W_q \quad (2.1.3)$$

Hukum ini berlaku umum untuk sistem antrian dalam kondisi *steady state* dan menunjukkan keterkaitan antara rata-rata jumlah pelanggan, laju kedatangan, serta waktu rata-rata yang dihabiskan dalam sistem (Allen, 1990).

2.1.6 Model-model Dasar Sistem Antrian

Model-model dasar sistem antrian merupakan representasi matematis dari proses pelayanan yang digambarkan melalui notasi Kendall. Setiap model memiliki karakteristik dan asumsi yang berbeda, sehingga memungkinkan analisis kinerja sistem secara kuantitatif, seperti efisiensi pelayanan, tingkat utilisasi, dan waktu tunggu rata-rata pelanggan.

Menurut Heizer dan Render (2011) beberapa model dasar yang umum digunakan dalam teori antrian antara lain sebagai berikut:

1. Model M/M/1

Model M/M/1 menggambarkan sistem dengan satu pelayan, proses kedatangan Poisson dengan laju rata-rata λ , serta waktu pelayanan berdistribusi eksponensial dengan laju μ dan kapasitas antrian tak terbatas. Nilai parameter kinerja dalam model ini antara lain:

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (2.1.4)$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.1.5)$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (2.1.6)$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad (2.1.7)$$

Sebagai contoh:

Suatu bengkel mobil menerima pelanggan dengan laju kedatangan rata-rata $\lambda = 2$ mobil per jam, dan satu mekanik mampu melayani dengan laju rata-rata $\mu = 3$ mobil per jam. Tingkat utilisasi sistem dapat dihitung sebagai berikut:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} = 0,66$$

Dengan menggunakan rumus dasar model M/M/1, ukuran kinerja dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,66}{1 - 0,66} = 1,94 \text{ mobil/jam}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2^2}{3(3 - 2)} = 1,33 \text{ mobil/jam}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 2} = 1 \text{ jam/mobil}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3(3 - 2)} = 0,67 \text{ jam}$$

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa sistem berada dalam kondisi stabil karena $\lambda < \mu$. Rata-rata terdapat dua pelanggan di dalam sistem, yang

mencakup pelanggan yang sedang dilayani maupun yang menunggu dalam antrian, dengan waktu tunggu rata-rata sebesar 0,67 jam/ 40 menit.

2. Model M/M/c

Model M/M/c merupakan pengembangan dari model M/M/1 dengan jumlah pelayan sebanyak c yang bekerja secara paralel. Kedatangan pelanggan tetap berdistribusi Poisson dengan laju λ dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial dengan laju μ . Persamaan kinerja pada model ini meliputi:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \quad (2.1.8)$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} P_0 \quad (2.1.9)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (2.1.10)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (2.1.11)$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.1.12)$$

Model ini sering digunakan untuk sistem pelayanan *multi-server* seperti teller bank atau loket tiket.

3. Model M/G/1

Model ini digunakan ketika kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson, namun waktu pelayanan mengikuti distribusi umum (general) dengan variansi tertentu. Kinerja rata-rata model ini dihitung menggunakan rumus *Pollaczek-Khinchine* (P-K Formula). Model ini relevan jika sistem pelayanan memiliki variasi waktu yang sangat tinggi dan tidak dapat didekati dengan distribusi eksponensial.

4. G/G/1

Model *G/G/1* merupakan bentuk paling umum di mana baik proses kedatangan maupun waktu pelayanan mengikuti distribusi bersifat umum. Karena kompleksitas matematisnya, model ini umumnya diselesaikan melalui pendekatan numerik, simulasi, atau aproksimasi, bukan melalui perhitungan analitik sederhana.

2.2 Jaringan Antrian

2.2.1 Pengertian jaringan antrian

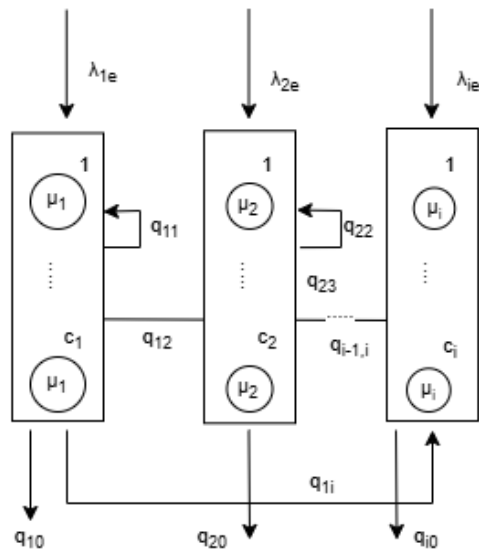
Jaringan antrian merupakan pengembangan dari antrian tunggal menjadi sistem pelayanan majemuk yang terdiri dari sekumpulan *node* pelayanan (*service centres*) yang saling terhubung satu sama lain. Setiap *node* dalam jaringan ini memiliki satu atau lebih pelayan (*servers*) serta kapasitas penyimpanan tertentu yang memungkinkan terbentuknya antrian. Jaringan antrian merupakan alat pemodelan yang krusial dalam perancangan sistem komputer, jaringan komunikasi, dan sistem manufaktur karena kemampuannya dalam memodelkan interaksi kompleks antar*node* pelayanan yang saling bergantung (Papadopoulos dkk. 1993).

2.2.2 Jenis-jenis jaringan

Jaringan antrian dapat diklasifikasikan berdasarkan pola aliran pelanggan dan interaksi antar pusat pelayanan. Klasifikasi ini menentukan bagaimana entitas masuk, berpindah, dan keluar dari sistem, serta berpengaruh terhadap model matematis yang digunakan dalam analisisnya. Jaringan antrian secara umum dibagi menjadi tiga jenis utama, (Lazowska dkk. 1984) yaitu:

1. Jaringan Antrian Terbuka (*Open Queueing Network*)

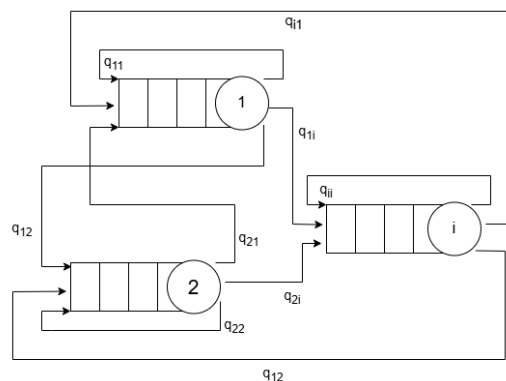
Jaringan terbuka memungkinkan pertukaran entitas dengan lingkungan eksternal, di mana pelanggan memasuki sistem dengan laju kedatangan eksternal $\lambda_{i,e} > 0$ dan dapat meninggalkan sistem setelah pelayanan selesai ($q_{i0} > 0$). Model ini merujuk pada formulasi Jackson (1957) yang mengasumsikan proses kedatangan Poisson dan waktu pelayanan eksponensial. Karakteristik ini memungkinkan sistem dianalisis dalam kondisi *steady-state* menggunakan pendekatan *product-form solution*.



Gambar 2.5 Open Queuing Network
(Sumber: Papadopoulos dkk. 1993)

2. Jaringan Antrian Tertutup (*Closed Queueing Network*)

Berbeda dengan model terbuka, jaringan tertutup memiliki populasi pelanggan yang konstan (N) tanpa adanya aliran masuk maupun keluar sistem ($\lambda = 0$ dan $q_{i0} = 0$). Pelanggan bersirkulasi secara internal antarnode berdasarkan probabilitas perutean yang telah ditentukan. Buzen (1973) mengembangkan metode *Mean Value Analysis* (MVA) untuk menghitung parameter kinerja jaringan tertutup tanpa harus memperoleh distribusi probabilitas lengkap dari sistem.



Gambar 2.6 Closed Queuing Network
(Sumber: Papadopoulos dkk. 1993)

3. Jaringan Antrian Campuran (*Mixed Queueing Network*)

Jenis ini merupakan kombinasi dari jaringan terbuka dan tertutup, di mana sebagian pelanggan dapat masuk atau keluar dari sistem, sementara sebagian lainnya bersirkulasi secara internal. Model ini umumnya digunakan untuk merepresentasikan arsitektur sistem kompleks, seperti pusat data yang melayani permintaan pengguna luar sekaligus menjalankan tugas-tugas pemeliharaan internal secara berkelanjutan.

2.3 Jackson Network

2.3.1 Pengertian dan sejarah model Jackson

Model Jackson Network merupakan pengembangan dari teori jaringan antrian yang diperkenalkan oleh Jackson (1957), yang menunjukkan bahwa jaringan antrian terbuka dengan proses kedatangan Poisson dan waktu pelayanan eksponensial memiliki distribusi *steady-state* berbentuk *product-form solution*. Model ini menggambarkan sistem pelayanan *multinode*, di mana pelanggan berpindah antar node berdasarkan probabilitas perutean tertentu tanpa mengubah sifat distribusi kedatangan di setiap node. Pendekatan ini menjadi landasan analisis berbagai sistem kompleks seperti jaringan komunikasi, sistem manufaktur, dan sistem layanan terdistribusi (Papadopoulos dkk. 1993).

2.3.2 Asumsi dasar model Jackson

Model Jackson Network dibangun berdasarkan seperangkat asumsi probabilistik yang memastikan sistem antrian *multi-node* dapat dianalisis secara matematis menggunakan pendekatan *product-form steady-state solution*. Asumsi-asumsi ini berfungsi untuk menjamin bahwa aliran pelanggan antar pusat pelayanan bersifat stasioner dan independen, sehingga setiap node dalam jaringan dapat dianalisis secara terpisah sebagai sistem antrian $M/M/c$ yang mandiri. Merujuk pada formulasi yang dikembangkan oleh Papadopoulos dkk. (1993), jaringan Jackson terbuka harus memenuhi kriteria utama sebagai berikut:

1. Proses Kedatangan Eksternal: Setiap *node* i menerima kedatangan pelanggan dari luar sistem yang mengikuti Proses Poisson dengan laju rata-rata $\lambda_{i,e}$ yang konstan.
2. Distribusi Waktu Pelayanan: Waktu pelayanan pada setiap node mengikuti

distribusi eksponensial dengan laju pelayanan μ_i dan bersifat independen antar node, dengan disiplin pelayanan *first come, first served* (FCFS).

3. Mekanisme Perutean (*Routing*): Pelanggan yang telah menyelesaikan pelayanan di *node i* akan menuju *node j* dengan probabilitas q_{ij} , atau meninggalkan sistem dengan probabilitas $q_{i,0} = 1 - \sum_{j=1}^M q_{ij}$. Hubungan antarnode dalam jaringan dipresentasikan oleh matriks probabilitas perutean $Q = [q_{ij}]$, yang menentukan arah serta intensitas aliran pelanggan dalam jaringan.
4. Kapasitas antrian: Setiap *node* pelayanan diasumsikan memiliki kapasitas penyimpanan (*buffer*) yang tidak terbatas, sehingga tidak terjadi pemblokiran (*blocking*) antar *node* dalam jaringan.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, jaringan Jackson memiliki sifat bahwa distribusi probabilitas keadaan *steady-state* sistem dapat dinyatakan dalam bentuk *product-form solution*, di mana distribusi probabilitas gabungan sistem merupakan hasil kali dari distribusi masing-masing node.

2.3.3 Persamaan Dasar dan Kondisi *Steady-State* (*Flow Balance Equation*)

Sistem jaringan antrian dalam model Jackson dapat direpresentasikan sebagai graf berarah (*directed graph*), di mana setiap pusat pelayanan berfungsi sebagai simpul (*node*) dan perpindahan pelanggan antar simpul direpresentasikan sebagai sisi (*edge*).

Prinsip utama dalam menganalisis jaringan antrian terbuka adalah menentukan laju kedatangan total (λ_i) pada setiap node. Berdasarkan konsep keseimbangan aliran (*flow balance*), total laju kedatangan pelanggan yang memasuki node *i* merupakan hasil penjumlahan dari laju kedatangan eksternal dan laju aliran internal yang berasal dari node lain di dalam jaringan. Secara matematis, persamaan keseimbangan aliran ini dapat dinyatakan sebagai berikut (Virtamo, 2005):

$$\lambda_i = \lambda_{i,e} + \sum_{j=1}^M \lambda_j q_{ji} \quad (2.3.13)$$

di mana:

- λ_i = laju kedatangan total pada *node i*.
- $\lambda_{i,e}$ = laju kedatangan eksternal dari luar sistem ke *node i*.

- λ_j = laju kedatangan total pada *node* j .
- q_{ji} = probabilitas pelanggan berpindah dari *node* j ke *node* i .
- M = jumlah total *node* dalam jaringan.

Kondisi *steady-state* pada jaringan Jackson tercapai apabila sistem memenuhi syarat stabilitas, yaitu $\lambda_i < s_i \mu_i$ atau $\rho_i < 1$ untuk setiap *node*. Pada kondisi ini, rata-rata aliran pelanggan yang masuk akan sama dengan yang keluar, sehingga jumlah pelanggan dalam sistem tetap stabil.

Untuk merepresentasikan laju kedatangan sistem *steady-state* di setiap *node*, persamaan *flow balance* yang dituliskan untuk seluruh *node* dalam jaringan membentuk suatu sistem persamaan linear (SPL) dengan variabel tak diketahui berupa laju kedatangan total pada setiap *node*. Sistem persamaan linear tersebut dinyatakan dalam bentuk vektor dan matriks sebagai (Lazowska dkk. 1984):

$$\lambda = \lambda_{ie} + \lambda Q \quad (2.3.14)$$

atau dapat ditulis ulang sebagai:

$$\lambda(I - Q) = \lambda_{ie} \quad (2.3.15)$$

sehingga, apabila matriks $(I - Q)$ invertibel, solusi SPL dapat diperoleh menggunakan metode matriks invers sebagai:

$$\lambda = \lambda_{ie}(I - Q)^{-1} \quad (2.3.16)$$

Nilai λ yang diperoleh merupakan laju kedatangan efektif pada masing-masing *node* pada kondisi *steady-state*. dimana:

- $\lambda = \lambda[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ adalah vektor laju kedatangan di tiap *node*,
- $\lambda_{ie} = [\lambda_{1,e}, \lambda_{2,e}, \dots, \lambda_{k,e}]$ adalah vektor laju kedatangan eksternal ke tiap *node*.
- I adalah matriks identitas, dan
- Q adalah matriks probabilitas routing berukuran $K \times K$.

2.3.4 Distribusi *Steady-State* dan *Product-Form Solution*

Teorema Jackson menyatakan bahwa pada jaringan antrian terbuka yang memenuhi asumsi dasar, jumlah pelanggan pada setiap *node* bersifat independen secara probabilistik pada kondisi *steady-state* (Virtamo, 2005). Keadaan sistem jaringan dapat direpresentasikan oleh vektor keadaan $N = (N_1, N_2, \dots, N_M)$, di mana N_i menyatakan jumlah pelanggan pada *node* ke- i . Probabilitas keadaan sistem $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ dinyatakan sebagai probabilitas gabungan $p(n) = P\{N = n\}$, yang memiliki bentuk *product-form* sebagai hasil kali dari distribusi marginal masing-masing *node*.

Secara matematis, distribusi *steady-state* jaringan dapat dituliskan sebagai (Virtamo, 2005):

$$P(n) = \prod_{i=1}^M P_i(n_i) \quad (2.3.17)$$

Secara matematis, jumlah pelanggan pada setiap *node* bersifat independen. Secara struktural, *node-node* dalam jaringan tetap saling terhubung melalui mekanisme perutean pelanggan. Untuk *node* dengan satu pelayan dan waktu pelayanan eksponensial (M/M/1), distribusi probabilitas *steady-state* diberikan oleh:

$$P_i(n_i) = (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} \quad (2.3.18)$$

Sifat *product-form* ini mengimplikasikan bahwa banyaknya pelanggan pada satu *node* tidak memberikan informasi langsung mengenai jumlah pelanggan pada *node* lain, meskipun seluruh *node* saling terhubung melalui mekanisme perutean dalam jaringan.

2.3.5 Ukuran kinerja setiap *node*

Ukuran kinerja pada jaringan Jackson ditentukan berdasarkan ukuran kinerja masing-masing *node*. Karena setiap *node* dalam jaringan dapat dipandang sebagai sistem antrian tersendiri, maka perhitungan ukuran kinerja pada tiap *node* mengikuti model antrian sesuai karakteristiknya, yaitu M/M/1 atau M/M/c.

Berikut disajikan contoh sederhana model *Jackson Open Queuing Network* dengan dua *node* pelayanan:

Pelanggan memasuki sistem melalui *node* 1 dengan laju kedatangan eksternal sebesar $\lambda_{1,e} = 5$ pelanggan per menit. Aliran perpindahan pelanggan antar-*node* di dalam

sistem, termasuk peluang pelanggan meninggalkan sistem, ditentukan secara spesifik oleh matriks probabilitas transisi Q sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks tersebut, diketahui bahwa probabilitas perpindahan dari *node* 1 ke *node* 2 adalah $q_{12} = 0,3$ dan probabilitas aliran balik dari *node* 2 ke *node* 1 (*feedback*) adalah $q_{21} = 0,1$.

Laju pelayanan di masing-masing *node* adalah:

$$\mu_1 = 8 \text{ pelanggan/menit}, \quad \mu_2 = 6 \text{ pelanggan/menit}$$

Langkah 1. Menentukan laju kedatangan efektif tiap *node* Sesuai dengan persamaan *flow balance* pada kondisi *steady-state*:

$$\lambda_i = \lambda_{i,e} + \sum_{j=1}^M \lambda_j q_{ji}$$

Sistem dua *node* menghasilkan:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e_{1,e} + \lambda_2 q_{21} \\ \lambda_2 &= 0,3\lambda_1 \end{aligned}$$

Substitusi menghasilkan:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5 + 0,1\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 0,3\lambda_1 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \lambda &= 5 + 0,1(0,3)\lambda_1 = 5,15 \\ \lambda_2 &= 0,3(5,15) = 1,55 \end{aligned}$$

Langkah 2. Menghitung ukuran kinerja tiap *node*

1. Utilisasi tiap *node* (ρ_i)

$$\rho_1 = \frac{5,15}{8} = 0,64, \quad \rho_2 = \frac{1,55}{6} = 0,26$$

2. Jumlah pelanggan rata-rata dalam sistem (L_i)

$$L_1 = \frac{0.64}{1 - 0.64} = 1,78, \quad L_2 = \frac{0.26}{1 - 0.26} = 0,35$$

3. Jumlah pelanggan rata-rata dalam antrian (L_q)

$$L_{q1} = \frac{5.15^2}{8(8 - 5.15)} = 1.16 \quad L_{q2} = \frac{1.55^2}{6(6 - 1.55)} = 0.09$$

4. Waktu tunggu rata-rata dalam sistem (W_i)

$$W_1 = \frac{1}{8 - 5.15} = 0.35, \quad W_2 = \frac{1}{6 - 1.55} = 0.23$$

5. Waktu tunggu rata-rata dalam antrian (W_q)

$$W_{q1} = \frac{0,64}{8 - 5.15} = 0,22 \quad W_{q2} = \frac{0,26}{6 - 1.55} = 0,06$$

total sistem

$$L = L_1 + L_2 = 1.7 + 0.35$$

$$W = \frac{L}{\lambda_{ie}} = \frac{2.13}{5} = 0.43$$

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa sistem dua-*node* tersebut berada dalam kondisi stabil karena $\rho_1, \rho_2 < 1$. *Node* 1 menjadi titik pelayanan dengan tingkat utilisasi tertinggi (64%), sedangkan *Node* 2 relatif lebih longgar (26%). Nilai waktu tunggu total sebesar 0,43 menit menunjukkan efisiensi sistem yang cukup baik. Contoh sederhana ini menggambarkan bagaimana model *Jackson Open Queuing Network* dapat digunakan untuk menganalisis performa sistem pelayanan dengan beberapa *node* yang saling terhubung.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka yaitu metode pendekatan yang pembahasannya didasarkan atas buku-buku dan artikel yang berhubungan dengan bahasan Pendekatan *Jackson Open Queuing Network* untuk Analisis Sistem Antrian *Multi-Node*. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam melaksanakan penelitian ini adalah:

1. Mempelajari literatur yang berkaitan dengan teori dasar sistem antrian, jaringan antrian terbuka, serta teorema Jackson sebagai landasan dalam membangun model antrian *multi-node*.
2. Mengidentifikasi parameter-parameter utama dalam sistem antrian terbuka, seperti laju kedatangan eksternal (λ^{ext}), laju pelayanan tiap *node* (μ_j), serta probabilitas transisi antar-*node* (q_{ij}) dan keluar sistem (q_{j0}).
3. Menyusun arsitektur sistem antrian *multi-node* yang terdiri atas beberapa titik layanan (*node*) dengan hubungan antar-*node* yang ditentukan melalui matriks probabilitas transisi $Q = [q_{ij}]$.
4. Menurunkan model matematis sistem menggunakan prinsip keseimbangan

aliran *flow balance* pada setiap node, dengan bentuk umum:

$$\lambda_i = \lambda_{i,e} + \sum_{j=1}^M \lambda_j q_{ji}$$

5. Menyelesaikan sistem persamaan linear untuk mendapatkan nilai laju kedatangan efektif (λ_i) pada kondisi *steady-state*.
6. Menghitung indikator kinerja tiap *node* meliputi tingkat utilisasi (ρ), probabilitas sistem kosong (P_0), panjang antrian (L_q), jumlah pelanggan dalam sistem (L), waktu tunggu antrian (W_q), dan waktu total dalam sistem (W).
7. Menyajikan hasil perhitungan dengan mengamati hubungan antara parameter sistem dan kinerja jaringan antrian.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis sistem antrian menggunakan model *Open Jackson Network*, dapat disimpulkan bahwa perbedaan struktur dan parameter sistem mempengaruhi kinerja antrian. Sistem layanan kesehatan, meskipun memiliki struktur yang lebih kompleks, menunjukkan kinerja yang baik dengan tingkat utilisasi rendah serta waktu tunggu yang relatif kecil.

Sebaliknya, sistem kantor imigrasi menunjukkan adanya ketidakseimbangan beban pelayanan, di mana *node 2* memiliki tingkat utilisasi yang lebih tinggi sehingga menyebabkan peningkatan panjang antrian dan waktu tunggu. Kondisi ini mengakibatkan waktu total dalam sistem menjadi lebih besar dan menurunkan efisiensi pelayanan.

Dengan demikian, kinerja sistem antrian tidak hanya ditentukan oleh kompleksitas struktur, tetapi juga oleh keseimbangan kapasitas pelayanan pada setiap *node*. Model *Open Jackson Network* dalam penelitian ini terbukti dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan dan kinerja sistem antrian secara efektif.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian, penelitian selanjutnya dapat mengembangkan model dengan mempertimbangkan jumlah server yang lebih dari satu pada setiap *node* atau menggunakan data observasi lapangan agar hasil analisis dapat dibandingkan dengan kondisi nyata serta memberikan gambaran kinerja sistem antrian yang lebih komprehensif.

DAFTAR PUSTAKA

- Alam, M. G. R., Suma, T. M., Uddin, S. M., Siam, M. B. A. K., Mahbub, M. S. B., Hassan, M. M., & Fortino, G. (2021). Queueing theory based vehicular traffic management system through Jackson network model and optimization. *IEEE Access*, 9, 122000–122020.
- Al-Bahadili, H., Al-Soud, A. R., & Al-Ajlouni, A. F. (2011). Analytical modeling of a multi-queue nodes network router. *Journal of Computer Science*, 7(5), 717–725.
- Allen, A. O. (1990). *Probability, statistics, and queueing theory: With computer science applications*. Gulf Professional Publishing.
- Arum, H. M. P., & Endrayanto, I. (2020). On the application of open Jackson queuing network in hospitals. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, 474, 108–115.
- Buzen, J. P. (1973). Computational algorithms for closed queueing networks with exponential servers. *Communications of the ACM*, 16(9), 527–531. <https://doi.org/10.1145/362342.362345>
- Erlang, A. K. (1909). The theory of probabilities and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik B*, 20, 33–39. Diakses dari <https://web.archive.org/web/20110719124203/http://oldwww.com.dtu.dk/teletraffic/erlangbook/pps156-171.pdf>
- Faris, M. F., Farida, Y., Novitasari, D. C. R., Ulinnuha, N., & Hafiyusholeh, M. (2020). Implementation of the open Jackson queuing network to reduce waiting time. *Jurnal Matematika MANTIK*, 6(2), 83–92. <https://doi.org/10.15642/mantik.2020.6.2.83-92>
- Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J. M., & Harris, C. M. (2008). *Fundamentals of queueing theory* (4th ed.). John Wiley & Sons.
- Heizer, J., & Render, B. (2011). *Operations management* (10th ed.). Pearson Education.

- Jackson, J. R. (1957). Networks of waiting lines. *Operations Research*, 5(4), 518–521. <https://doi.org/10.1287/opre.5.4.518>
- Kandemir-Cavas, C., & Cavas, L. (2007). An application of queueing theory to the relationship between insulin level and number of insulin receptors. *Turkish Journal of Biochemistry*, 32(1), 32–38.
- Kendall, D. G. (1953). Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the embedded Markov chain. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(3), 338–354. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177728975>
- Lazowska, E. D., Zahorjan, J., Graham, G. S., & Sevcik, K. C. (1984). *Queueing network modelling: The analysis of computer system performance*. John Wiley & Sons.
- Maswitha, & Sitorus, S. (2025). Application of Jackson network queue model on visitor queue at Population and Civil Registration Service of Batubara District. *Hanif Journal of Information Systems*, 2(2), 54–61.
- Papadopoulos, H. T., Heavey, C., & Browne, J. (1993). *Queueing theory in manufacturing systems analysis and design*. Chapman & Hall.
- Virtamo, J. (2005). *Queueing Networks Lecture Notes*. Helsinki University of Technology, Networking Laboratory.
- Widianto, M. H. (2019). *Teori antrian*. BINUS Bandung. Diakses pada 11 November 2025, pukul 10.36 WIB, dari <https://binus.ac.id/bandung/2019/12/teori-antrian/>