

**STUDI DINAMIKA DAN BIFURKASI MODEL PLANKTON-OKSIGEN
DIMENSI TIGA**

Skripsi

Oleh

**LUIS IMANUEL SANGAP MUGABE
NPM. 2217031077**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

ABSTRACT

STUDY OF THE DYNAMICS AND BIFURCATION OF A THREE-DIMENSIONAL PLANKTON-OXYGEN MODEL

By

Luis Imanuel Sangap Mugabe

This study investigates the dynamics and bifurcation of a three-dimensional plankton-oxygen model involving interactions among phytoplankton, zooplankton, and oxygen. The plankton-oxygen model is first formulated in an explicit form to facilitate numerical analysis. The system dynamics are analyzed using numerical methods through trajectory visualization and time series under stable conditions and during the occurrence of Hopf bifurcation. To examine the characteristics of the emerging periodic oscillations, Poincaré Section visualization is employed. Hopf bifurcation is numerically detected by varying certain parameters and observing changes in the system solutions, which are subsequently illustrated using bifurcation diagrams. Bifurcation analysis is performed by comparing the relationships between phytoplankton and oxygen, oxygen and zooplankton, as well as phytoplankton and zooplankton. The results show that parameter variations can induce a transition from a stable state to periodic oscillations due to Hopf bifurcation, reflecting the complex dynamics of the three-dimensional plankton-oxygen system.

Keywords: plankton-oxygen model, system dynamics, Hopf bifurcation, numerical methods.

ABSTRAK

STUDI DINAMIKA DAN BIFURKASI MODEL PLANKTON-OKSIGEN DIMENSI TIGA

Oleh

Luis Imanuel Sangap Mugabe

Penelitian ini mengkaji dinamika dan bifurkasi pada model plankton-oksigen tiga dimensi yang melibatkan interaksi antara fitoplankton, zooplankton, dan oksigen. Model plankton-oksigen terlebih dahulu diformulasikan dalam bentuk eksplisit untuk memudahkan analisis numerik. Analisis dinamika sistem dilakukan dengan menggunakan metode numerik melalui visualisasi trajektori dan deret waktu (*time series*) pada kondisi stabil serta pada kondisi terjadinya bifurkasi Hopf. Untuk mengamati karakteristik osilasi periodik yang muncul, digunakan visualisasi *Poincaré Section*. Deteksi bifurkasi Hopf dilakukan secara numerik dengan memvariasikan parameter tertentu dan mengamati perubahan perilaku solusi sistem, yang selanjutnya divisualisasikan dalam diagram bifurkasi. Analisis bifurkasi dilakukan dengan membandingkan hubungan antara fitoplankton dan oksigen, oksigen dan zooplankton, serta fitoplankton dan zooplankton. Hasil penelitian menunjukkan bahwa perubahan parameter dapat menyebabkan peralihan dari kondisi stabil menuju osilasi periodik akibat bifurkasi Hopf, yang mencerminkan dinamika kompleks pada sistem plankton-oksigen.

Kata-kata kunci: model plankton–oksigen, dinamika sistem, bifurkasi Hopf, metode numerik.

**STUDI DINAMIKA DAN BIFURKASI MODEL PLANKTON-OKSIGEN
DIMENSI TIGA**

LUIS IMANUEL SANGAP MUGABE

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG**

2026

Judul Skripsi

: **STUDI DINAMIKA DAN BIFURKASI
MODEL PLANKTON-OKSIGEN DIMENSI
TIGA**

Nama Mahasiswa

: **Luis Imanuel Sangap Mugabe**

Nomor Pokok Mahasiswa

: **2217031077**

Program Studi

: **Matematika**

Fakultas

: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.
NIP 196902131994021001

Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 197008311999031002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua

: Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.

Sekretaris

: Dr. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.

Penguji

Bukan Pembimbing

: Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.

NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 22 Juni 2026

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Luis Imanuel Sangap Mugabe**
Nomor Pokok Mahasiswa : **2217031077**
Jurusan : **Matematika**
Judul Skripsi : **Studi Dinamika dan Bifurkasi Model Plankton
Oksigen Dimensi Tiga**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 22 Juni 2026

Penulis.



Luis Imanuel Sangap Mugabe

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Luis Imanuel Sangap Mugabe, dilahirkan pada tanggal 01 September 2004 di Kota Bekasi. Penulis merupakan putra kelima dari Bapak Radot Sihalohe dan Ibu Mistan Antonius Turnip.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Pertiwi pada tahun 2009-2010. Kemudian menempuh pendidikan di Sekolah Dasar (SD) di SD Santa Lusia pada tahun 2010-2016. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama di SMP Santa Lusia pada tahun 2016-2019. Selanjutnya belajar pada jenjang Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 19 Kota Bekasi pada tahun 2019-2022. Pada tahun 2022 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Pada tahun 2023 dan 2024 penulis aktif di UKM Tingkat Universitas atau UKM-U Saintek Unila, penulis diamanahkan menjadi Anggota Departemen Dana dan Usaha.

KATA INSPIRASI

”Marilah kepada-Ku, semua yang letih lesu dan berbeban berat, Aku akan memberi kelegaan kepadamu”

(Matius 11:28)

”Mintalah, maka akan diberikan kepadamu; carilah, maka kamu akan mendapat; ketuklah, maka pintu akan dibukakan bagimu. Karena setiap orang yang meminta, menerima dan setiap orang yang mencari, mendapat dan setiap orang yang mengetuk, baginya pintu dibukakan”

(Matius 7:7-8)

Percayalah kepada Tuhan dengan segenap hatimu, dan jangan mengandalkan pengertianmu sendiri. Dalam segala jalanmu akuilah Dia, dan Dia akan meluruskan jalanmu.

(Amsal 3:5-6)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan dan syukur kepada Tuhan YME atas nikmat serta berkat sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terimakasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho serta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan lancar. Skripsi ini berjudul “*Studi Dinamika dan Bifurkasi Model Plankton–Oksigen Dimensi Tiga*” dan disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana pada Jurusan Matematika Universitas Lampung. Atas rahmat dan berkat-Nya pula, skripsi ini dapat diselesaikan tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah memberikan bantuan berupa bimbingan, arahan, dukungan, motivasi, serta saran yang sangat berarti. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing 1 yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Agus Sutrisno, S.Si, M.Si., selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan yang membangun.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Kedua orang tua penulis, Papa dan Mama yang selalu mendoakan disetiap waktu, memberi nasehat, membimbing, memotivasi, mendukung, serta menjadi semangat tersendiri bagi penulis dalam menjalani setiap proses.
8. Saudari Kandung Penulis, yang selalu mendoakan disetiap waktu, memberi nasehat, membimbing, memotivasi, mendukung, serta menjadi semangat tersendiri bagi penulis dalam menjalani setiap proses.
9. Terima kasih untuk diri sendiri yang telah berjuang, berproses, dan bertahan hingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman–teman Matematika angkatan 2022 khususnya kelas A yang telah membantu serta memberikan semangat kepada penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 22 Juni 2026

Luis Imanuel Sangap Mugabe

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	4
II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Pemodelan Matematika	5
2.2 Model Plankton Oksigen	5
2.3 Persamaan Diferensial	6
2.4 Persamaan Diferensial Biasa Non Linear	7
2.5 Sistem Dinamik	7
2.6 Titik Keseimbangan	8
2.7 Formulasi Cardano	9
2.8 Matriks Jacobian	11
2.9 Analisis Kestabilan	11
2.10 Teori Bifurkasi	12
2.11 Bifurkasi Hopf	13
2.12 Ekosistem Perairan	14
2.13 Metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)	14
2.14 <i>Software</i>	16
III METODE PENELITIAN	17
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	17
3.2 Alat dan Bahan Penelitian	17
3.3 Metode Penelitian	18
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	21
4.1 Konstruksi Bentuk Eksplisit Titik Stasioner Model Plankton-Oksigen	21

4.2	Studi Kasus	27
4.3	Visualisasi <i>Trajectory</i> dan <i>Time Series</i>	32
4.4	Visualisasi <i>Poincaré Section</i>	35
4.5	Analisis Kestabilan	39
4.6	Bentuk Eksplisit untuk Mendeteksi Parameter Bifurkasi Hopf	42
4.7	Bifurkasi Hopf	44
V	KESIMPULAN DAN SARAN	52
5.1	Kesimpulan	52
5.2	Saran	52
	DAFTAR PUSTAKA	53
	LAMPIRAN	56

DAFTAR TABEL

4.1	Parameter Model Plankton–Oksigen	27
4.2	Parameter Model Plankton-Oksigen	28
4.3	Parameter Model Plankton-Oksigen	30
4.4	Perbandingan Nilai Parameter yang Diperoleh Secara Eksplisit dan Numerik	43

DAFTAR GAMBAR

2.1	Ilustrasi berbagai tipe titik kesetimbangan dan medan vektor.	8
2.2	Ilustrasi bifurkasi Hopf.	13
3.1	Diagram alur penelitian	19
3.2	Diagram alur pemrograman	20
4.1	sistem (4.1.1) ditunjukkan melalui: (a) <i>time series</i> untuk $r = 0.35$ beserta (c) <i>phase potrait</i> ; serta (b) <i>time series</i> untuk $r = 3.00$ beserta (d) <i>phase potrait</i>	32
4.2	sistem (4.1.1) ditunjukkan melalui: (a) <i>time series</i> untuk $\alpha_2 = 0.17$ beserta (c) <i>phase potrait</i> ; serta (b) <i>time series</i> untuk $\alpha_2 = 0.32$ beserta (d) <i>phase potrait</i>	33
4.3	sistem (4.1.1) ditunjukkan melalui: (a) <i>time series</i> untuk $m = 0.25$ beserta (c) <i>phase potrait</i> ; serta (b) <i>time series</i> untuk $m = 0.901$ beserta (d) <i>phase potrait</i>	34
4.4	Bentuk <i>pointcaré section</i> (studi kasus 1)	35
4.5	Bentuk <i>pointcaré section</i> (studi kasus 2)	36
4.6	Bentuk <i>pointcaré section</i> (studi kasus 3)	37
4.7	Deteksi Hopf pada parameter r	44
4.8	Visualisasi Hopf pada parameter r	45
4.9	Deteksi Hopf pada parameter α_2	46
4.10	Visualisasi Hopf pada parameter α_2	47
4.11	Deteksi Hopf pada parameter m	49
4.12	Visualisasi Hopf pada parameter m	50

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Plankton merupakan organisme mikroskopis yang hidup terapung di perairan dan memiliki peran penting dalam menjaga keseimbangan ekosistem perairan. Berdasarkan jenisnya, plankton dibedakan menjadi fitoplankton dan zooplankton. Fitoplankton berfungsi sebagai produsen primer yang dapat mengubah zat anorganik menjadi zat organik melalui proses fotosintesis, sedangkan zooplankton berperan sebagai konsumen primer yang memanfaatkan fitoplankton sebagai sumber makanan (Wahyuni & Rosanti, 2016).

Keberadaan plankton dalam suatu perairan sangat dipengaruhi oleh kondisi lingkungannya, yang memiliki peran penting dalam menentukan kelimpahan dan jenis plankton (Rizal, 2006). Selain itu, tingkat kesuburan suatu perairan dapat diketahui melalui keberadaan plankton, karena keberlimpahan organisme ini mencerminkan tingkat produktivitas suatu perairan (Rosanti, 2006).

Untuk memahami dinamika interaksi ini, pendekatan matematis melalui model plankton-oksigen, dimana fitoplankton berperan sebagai produsen primer yang menjadi sumber makanan utama bagi zooplankton. Hubungan predasi ini turut memengaruhi keseimbangan ekosistem karena kedua jenis organisme tersebut juga berinteraksi dengan kadar oksigen terlarut melalui proses respirasi dan aktivitas biologis lainnya. Model plankton-oksigen menunjukkan bahwa dinamika antara plankton dan oksigen dapat direpresentasikan menggunakan sistem dinamik nonlinear, yang memungkinkan analisis terhadap titik kesetimbangan, stabilitas lokal, serta perubahan perilaku sistem melalui analisis bifurkasi (Mondal et al., 2022).

Analisis bifurkasi memiliki peran penting dalam memahami perubahan stabilitas sistem serta perubahan titik kesetimbangan yang terjadi akibat variasi parameter.

Melalui analisis ini, dapat diidentifikasi bagaimana perubahan kecil pada parameter tertentu mampu memengaruhi kestabilan sistem secara keseluruhan. Tujuan utama dari analisis bifurkasi adalah untuk mengantisipasi dan meminimalkan terjadinya pergeseran kestabilan sehingga sistem yang dibentuk dapat berfungsi secara optimal. Terdapat berbagai jenis bifurkasi yang umum dijumpai dalam sistem dinamik, antara lain bifurkasi *saddle-node*, transkritikal, dan bifurkasi Hopf, yang masing-masing menunjukkan pola perubahan perilaku sistem yang berbeda (Hutabarat & Sinaga, 2023).

Dalam analisis bifurkasi, tidak semua permasalahan dalam matematika dapat diselesaikan secara analitik atau dengan perhitungan biasa, sehingga dibutuhkan pendekatan lain berupa metode numerik. Perangkat yang paling sering digunakan dalam penerapan metode numerik adalah MATLAB (*Matrix Laboratory*), Python, dan Mathematica karena memiliki kemampuan tinggi dalam perhitungan matriks, pemecahan persamaan diferensial, dan visualisasi hasil komputasi dalam bentuk grafik atau diagram (Hutagalung, 2017).

Kajian mengenai dinamika oksigen terlarut dan interaksi plankton telah banyak dilakukan untuk memahami kestabilan ekosistem perairan. (Misra et al., 2011) meneliti penurunan oksigen terlarut akibat ledakan alga dengan mempertimbangkan efek *time delay* dan menunjukkan bahwa perubahan kecil pada parameter dapat menyebabkan osilasi sistem. (Sekerci & Petrovskii, 2015) kemudian meninjau pengaruh perubahan iklim terhadap model plankton–oksigen dan menemukan bahwa penurunan kadar oksigen dapat memicu ketidakstabilan serta potensi kepunahan spesies. (Dhar & Baghel, 2016) menganalisis peran oksigen dalam dinamika plankton dan menunjukkan bahwa bifurkasi Hopf dapat terjadi ketika laju pertumbuhan fitoplankton digunakan sebagai parameter bifurkasi, menghasilkan perilaku osilasi periodik. Selanjutnya, (Mondal et al., 2022) memperluas kajian tersebut dan menemukan bahwa sistem dapat mengalami transisi dari keadaan stabil menuju *limit cycle*. Berdasarkan hasil-hasil penelitian tersebut, studi oleh (Ali et al., 2024) memperkuat pemahaman tentang dinamika plankton-oksigen dengan menambahkan faktor perlindungan fitoplankton (*refuge*), serta menunjukkan bahwa perubahan kecil dalam parameter konsumsi oksigen oleh zooplankton dapat memicu terjadinya bifurkasi Hopf dan pembentukan *limit cycle* dalam ekosistem perairan.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari Penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk eksplisit dari model plankton-oksigen tiga dimensi yang melibatkan interaksi antara fitoplankton, zooplankton, dan oksigen?
2. Parameter apa yang menyebabkan terjadinya bifurkasi Hopf pada model plankton-oksigen tiga dimensi?
3. Bagaimana perubahan dinamika sistem dari kondisi stabil menuju osilasi periodik akibat terjadinya bifurkasi Hopf jika ditinjau melalui visualisasi trajektori dan deret waktu (*time series*)?
4. Bagaimana karakteristik osilasi periodik yang ditunjukkan oleh *Poincaré Section* pada saat terjadi bifurkasi Hopf?
5. Bagaimana perbandingan perilaku hubungan antara fitoplankton dan oksigen, oksigen dan zooplankton, serta fitoplankton dan zooplankton sesudah terjadinya bifurkasi Hopf?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memformulasikan model plankton-oksigen tiga dimensi dalam bentuk eksplisit sebagai dasar analisis dinamika sistem.
2. Menganalisis perilaku dinamika sistem plankton–oksigen pada kondisi stabil menggunakan metode numerik.
3. Mengidentifikasi dan mendeteksi terjadinya bifurkasi Hopf melalui variasi parameter tertentu pada model.
4. Membandingkan dinamika sistem pada kondisi stabil dan pada kondisi setelah terjadinya bifurkasi Hopf menggunakan visualisasi trajektori dan deret waktu (*time series*).
5. Menganalisis karakteristik osilasi periodik yang muncul melalui visualisasi *Poincaré Section*.

6. Membandingkan perilaku hubungan antara fitoplankton dan oksigen, oksigen dan zooplankton, serta fitoplankton dan zooplankton sesudah terjadinya bifurkasi Hopf.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Dapat menyatakan persamaan sistem dinamik nonlinear dalam konteks ekosistem perairan, serta analisis bifurkasi pada model matematika melalui pendekatan matematika komputasi
2. Menampilkan kerangka kerja analisis, serta penerapan metode simulasi dan visualisasi numerik dalam studi bifurkasi dan kestabilan sistem.
3. Dapat dijadikan referensi bagi pembaca dalam bidang matematika terapan, teori sistem dinamik dan bifurkasi dalam kehidupan sehari-hari.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika berfungsi untuk menggambarkan dan memahami karakteristik dari fenomena yang dimodelkan, baik secara kualitatif maupun kuantitatif. Dalam proses penyusunan, pengembangan, atau penurunan model, diperlukan berbagai asumsi, pendekatan, dan batasan yang biasanya didasarkan pada hasil eksperimen atau pengamatan terhadap kondisi nyata. Asumsi dan penyederhanaan ini bertujuan untuk mempermudah analisis fenomena yang kompleks serta memungkinkan pengkajian pengaruh suatu faktor tertentu dengan mengabaikan faktor lainnya dalam sistem yang sedang diteliti (Cahyono, 2013).

Pemodelan matematika dianggap sebagai suatu metode pembelajaran yang berfokus pada kegiatan pemodelan serta penerapan konsep-konsep matematika untuk merepresentasikan, menganalisis, memprediksi, dan memberikan pemahaman yang lebih mendalam terhadap berbagai fenomena yang terjadi di dunia nyata (Riduan et al., 2024).

2.2 Model Plankton Oksigen

Pandang sistem ekologi plankton-oksigen (Ali et al., 2024)

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{ru}{(a_1 + w_0 - w)} - \alpha_1 u(1 - m)v - \delta_1 u, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\alpha_2 u(1 - m)v}{(a_2 + w_0 - w)} - \delta_2 v, \\ \frac{dw}{dt} &= s(w_0 - w) + du - \gamma w - \gamma_1 uw - \gamma_2 vw.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Dengan parameter:

- r : laju pertumbuhan fitoplankton
- α_1 : laju pemangsaan zooplankton terhadap fitoplankton
- α_2 : efisiensi konversi energi zooplankton
- a_1 : pengaruh oksigen terhadap pertumbuhan fitoplankton
- a_2 : pengaruh oksigen terhadap pertumbuhan zooplankton
- δ_1 : laju kematian alami fitoplankton
- δ_2 : laju kematian alami zooplankton
- m : faktor kehilangan makanan akibat metabolisme
- γ : laju penurunan oksigen di lingkungan
- γ_1 : tingkat konsumsi oksigen oleh fitoplankton
- γ_2 : tingkat konsumsi oksigen oleh zooplankton
- w_0 : konsentrasi oksigen maksimum di lingkungan
- s : laju suplai oksigen ke sistem
- d : laju difusi oksigen akibat fitoplankton

2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan (derivatif) satu atau lebih peubah tak bebas (peubah terikat) terhadap satu atau lebih peubah bebas suatu fungsi (Ubaidillah, 2024).

bentuk umum persamaan diferensial:

$$y' = f(x, y) \quad (2.3.2)$$

Dalam menentukan jenis persamaan diferensial dapat dilihat Apabila fungsi yang tak diketahui itu hanya bergantung pada satu peubah saja, maka persamaan diferensial tersebut dinamakan persamaan diferensial biasa, Sedangkan apabila fungsinya

bergantung pada dua atau lebih peubah, maka persamaan diferensial tersebut dinamakan persamaan diferensial parsial (Maya, 2021).

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang hanya memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas (Basrina et al., 2016).

bentuk persamaan diferensial biasa :

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p + 1) y = 0. \quad (2.3.3)$$

2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang memuat satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas (Pamuntjak & Santosa, 1990).

bentuk persamaan diferensial parsial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3.4)$$

2.4 Persamaan Diferensial Biasa Non Linear

Suatu persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear apabila variabel atau turunannya tidak muncul secara linear di dalam persamaan tersebut. Ketidaklinearan dapat muncul dalam berbagai bentuk, seperti adanya perkalian antar variabel, pemangkatan variabel (Ubaidillah, 2024).

berikut ini contoh bentuk persamaan diferensial biasa non linear:

$$y'' - 2x y' + \sqrt{y} = 0 \quad (2.4.5)$$

2.5 Sistem Dinamik

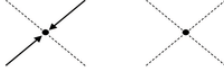
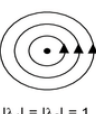
Sistem dinamik merupakan suatu pendekatan yang digunakan untuk memahami dan menganalisis permasalahan kompleks dalam berbagai bidang. Awalnya sistem dinamik difokuskan pada permasalahan dalam sistem industri dan bisnis. Seiring perkembangan waktu, penerapan metode ini semakin meluas hingga mencakup

sistem sosial, ekonomi, dan lingkungan (Forrester, 1961).

Sistem dinamik memanfaatkan simulasi komputer untuk mempelajari perubahan yang terjadi akibat penerapan suatu kebijakan dalam suatu sistem. Melalui proses ini, *user* dapat mengamati bagaimana sistem merespons terhadap berbagai variasi *input* yang diberikan. Dengan demikian, hasil simulasi dapat membantu *user* atau pengambil keputusan dalam merancang kebijakan yang lebih efektif serta mengambil keputusan secara lebih tepat dan terukur (Wirabhuana, 2009).

2.6 Titik Keseimbangan

Titik kesetimbangan pada suatu sistem dinamik dapat ditentukan sifatnya dengan mengamati tanda dari bagian *real* nilai *eigen* yang diperoleh melalui proses linearisasi di sekitar titik tersebut. Prosedur ini dilakukan dengan mengevaluasi Matriks Jacobian pada masing-masing titik kesetimbangan, kemudian meninjau nilai *eigen* yang dihasilkan untuk menganalisis kestabilan sistem. Karakteristik perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan secara lokal dapat dipelajari secara kualitatif, bahkan dalam beberapa kasus secara kuantitatif, dengan menggunakan vektor *eigen* yang terkait dengan setiap nilai *eigen* yang diperoleh (Perko, 2001).

	Stable $ \lambda_d < 1$	Lyapunov stable* $ \lambda_d = 1$	Unstable $ \lambda_d > 1$
Real eigenvalues	Stable point $ \lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1$ 	Neutral point $ \lambda_1 = 1, \lambda_2 < 1$ $ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ 	Saddle point Unstable point $ \lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1$ $ \lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$ 
Complex conjugate eigenvalues	 $ \lambda_1 = \lambda_2 < 1$ Stable spiral focus	 $ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ Neutral center	 $ \lambda_1 = \lambda_2 > 1$ Unstable spiral focus

Gambar 2.1 Ilustrasi berbagai tipe titik kesetimbangan dan medan vektor.

Sumber: <https://www.researchgate.net>

2.7 Formulasi Cardano

Misalkan diberikan persamaan kubik umum (Musli, 2015)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0. \quad (2.7.6)$$

Persamaan (2.7.6) dinormalkan dengan membagi seluruh suku oleh a sehingga koefisien suku pangkat tiga menjadi satu. Untuk menghilangkan suku kuadrat, digunakan transformasi linear

$$x = t - \frac{b}{3a}. \quad (2.7.7)$$

Transformasi (2.7.7) dipilih sedemikian rupa sehingga setelah substitusi ke dalam persamaan kubik ternormalisasi, suku yang memuat t^2 saling meniadakan. Setelah dilakukan substitusi dan penyederhanaan, persamaan kubik umum direduksi menjadi

$$t^3 + pt + q = 0, \quad (2.7.8)$$

Persamaan (2.7.8) sebagai persamaan kubik menurun (*depressed cubic*), dengan p dan q merupakan fungsi dari koefisien a , b , c , dan d .

Untuk menyelesaikan persamaan kubik (2.7.8), Cardano memperkenalkan substitusi

$$t = u + v. \quad (2.7.9)$$

Dengan memasukkan t pada persamaan (2.7.9) ke persamaan (2.7.8) diperoleh

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0. \quad (2.7.10)$$

atau

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0, \quad (2.7.11)$$

atau

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \quad (2.7.12)$$

Penyederhanaan persamaan (2.7.12) dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan (2.7.13), Cardano menetapkan syarat

$$3uv + p = 0. \quad (2.7.13)$$

dan diperoleh

$$u^3 + v^3 = -q, \quad (2.7.14)$$

Dari persamaan (2.7.13) diperoleh hubungan

$$uv = -\frac{p}{3}. \quad (2.7.15)$$

Dua persamaan terakhir sepenuhnya menentukan nilai u^3 dan v^3 . Dengan memperlakukan u^3 dan v^3 sebagai akar-akar suatu persamaan kuadrat, diperoleh persamaan

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (2.7.16)$$

Penyelesaian persamaan kuadrat tersebut memberikan

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (2.7.17)$$

Dengan demikian,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad (2.7.18)$$

dan

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (2.7.19)$$

Dengan mengambil akar pangkat tiga dari persamaan (2.7.18) dan (2.7.19), diperoleh solusi persamaan kubik menurun

$$t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (2.7.20)$$

Ekspresi ini dikenal sebagai rumus Cardano. Dua solusi lainnya diperoleh dengan memilih cabang lain dari akar pangkat tiga, yang melibatkan bilangan kompleks.

Akhirnya, karena variabel t diperkenalkan melalui transformasi

$$x = t - \frac{b}{3a}, \quad (2.7.21)$$

maka setiap solusi t dari persamaan (2.7.21) menghasilkan solusi x dari persamaan kubik semula. Dengan demikian, metode Cardano memberikan formulasi eksplisit bagi akar-akar persamaan kubik umum.

2.8 Matriks Jacobian

Pada model (2.2.1) yang digunakan, Matrix Jacobian diperoleh dengan menurunkan masing-masing fungsi $f_1(u, v, w)$, $f_2(u, v, w)$, dan $f_3(u, v, w)$ terhadap variabel u , v , dan w . Diperoleh hasil turunan sebagai berikut. Untuk fungsi pertama,

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{r}{a_1 + w_0 - w} - \alpha_1(1-m)v - \delta_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\alpha_1u(1-m), \quad \frac{\partial f_1}{\partial w} = \frac{ru}{(a_1 + w_0 - w)^2}.$$

Turunan dari fungsi kedua adalah

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{\alpha_2(1-m)v}{a_2 + w_0 - w}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{\alpha_2u(1-m)}{a_2 + w_0 - w} - \delta_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial w} = \frac{\alpha_2u(1-m)v}{(a_2 + w_0 - w)^2},$$

dan untuk fungsi ketiga diperoleh

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = d - \gamma_1w, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v} = -\gamma_2w, \quad \frac{\partial f_3}{\partial w} = -(s + \gamma + \gamma_1u + \gamma_2v).$$

Turunan-turunan ini kemudian disusun menjadi bentuk umum matriks Jacobian:

$$J(u, v, w) = \begin{bmatrix} \frac{r}{a_1 + w_0 - w} - \alpha_1(1-m)v - \delta_1 & -\alpha_1u(1-m) & \frac{ru}{(a_1 + w_0 - w)^2} \\ \frac{\alpha_2(1-m)v}{a_2 + w_0 - w} & \frac{\alpha_2u(1-m)}{a_2 + w_0 - w} - \delta_2 & \frac{\alpha_2u(1-m)v}{(a_2 + w_0 - w)^2} \\ d - \gamma_1w & -\gamma_2w & -(s + \gamma + \gamma_1u + \gamma_2v) \end{bmatrix}. \quad (2.8.22)$$

2.9 Analisis Kestabilan

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak-nol $\mathbf{x}$ pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor *eigen* (*eigen vector*) dari A jika $A\mathbf{x}$ merupakan kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$, yakni

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (2.9.23)$$

Untuk skalar sebarang λ , skalar tersebut disebut nilai *eigen* (*eigenvalue*) dari A , dan

$\mathbf{x}$ disebut sebagai vektor *eigen* dari matrix A yang terkait dengan λ .

Untuk memperoleh nilai *eigen* dari sebuah matriks $A_{n \times n}$, tulis kembali persamaan (2.9.23) sehingga diperoleh

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \quad (2.9.24)$$

Atau secara ekuivalen dapat diperoleh

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0. \quad (2.9.25)$$

Agar λ dapat menjadi nilai *eigen*, harus terdapat solusi tak-nol dari persamaan tersebut. Persamaan (2.9.25) memiliki solusi tak-nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (2.9.26)$$

Persamaan (2.9.26) persamaan karakteristik matriks A . Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik adalah nilai *eigen* dari matriks A . Skalar-skalar yang memuat persamaan (2.9.26) adalah nilai *eigen* dari matrix A (Anton, H. , 1992).

Menurut Olsder & Woude (2011), diberikan Jacobian $J(f(\bar{x}))$ dari sistem nonlinear

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.9.27)$$

dengan nilai-nilai *eigen* λ , maka:

- Sistem bersifat stabil asimtotik jika semua bagian real nilai *eigen* dari $J(f(\bar{x}))$ bernilai negatif.
- Sistem tidak stabil jika terdapat paling sedikit satu nilai *eigen* dari $J(f(\bar{x}))$ yang bagian *real* positif.

2.10 Teori Bifurkasi

Menurut Lynch (2010), bifurkasi didefinisikan sebagai suatu medan vektor $f \in \mathbb{R}^2$ yang terdiferensialkan secara kontinu dan dikatakan stabil secara struktur (*structurally stable*) apabila gangguan kecil pada sistem $\dot{x} = f(x)$ tidak menyebabkan perubahan perilaku sistem secara kualitatif. Sebaliknya, jika perubahan kecil pada sistem mengakibatkan perubahan perilaku dinamik, maka f

Sumber: Kuznetsov (2004).

2.12 Ekosistem Perairan

Ekosistem perairan merupakan sistem yang menggambarkan keterkaitan antara makhluk hidup dan elemen yang berada di lingkungan perairan. Makhluk hidup seperti ikan, udang, buaya, dan berbagai organisme lainnya saling berinteraksi dengan unsur abiotik seperti air, oksigen, batu karang, dan mineral. Ekosistem ini terbagi menjadi dua tipe utama, yaitu ekosistem air tawar dan ekosistem air laut (Wahyuni & Rosanti, 2016).

Salah satu komponen penting dalam ekosistem perairan adalah plankton, Plankton dibedakan menjadi fitoplankton dan zooplankton. Fitoplankton berfungsi sebagai produsen primer, sedangkan zooplankton berperan sebagai konsumen primer yang memangsa fitoplankton dan menjadi bagian penting dalam rantai makanan perairan. Oleh karena itu, keberadaan plankton menjadi indikator penting dalam keseimbangan dan produktivitas ekosistem perairan (Wahyuni & Rosanti, 2016).

2.13 Metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)

Metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) merupakan salah satu cara untuk mengatasi permasalahan numerik. Metode ini memiliki prosedur untuk menentukan apakah ukuran langkah h yang digunakan sudah tepat. Pada setiap langkah perhitungan, dua pendekatan yang berbeda terhadap solusi dihitung dan dibandingkan. Jika kedua hasil tersebut saling berdekatan, maka pendekatannya diterima. Namun, jika kedua hasil tersebut tidak sesuai dengan tingkat ketelitian yang diharapkan, ukuran langkah akan diperkecil. Sebaliknya, apabila kedua hasil tersebut memiliki lebih banyak angka signifikan daripada yang diperlukan, ukuran langkah akan diperbesar (Mathews & Fink, 2004).

Metode Runge–Kutta-Fehlberg dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(t_k, y_k), \\
 k_2 &= h f\left(t_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}k_1\right), \\
 k_3 &= h f\left(t_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\
 k_4 &= h f\left(t_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\
 k_5 &= h f\left(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\
 k_6 &= h f\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).
 \end{aligned} \tag{2.13.28}$$

Setelah keenam nilai k_i dihitung, pendekatan orde empat sehingga diperoleh

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5. \tag{2.13.29}$$

sedangkan pendekatan orde lima sehingga diperoleh

$$z_{k+1} = y_k + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6. \tag{2.13.30}$$

Estimasi galat lokal diperoleh dari selisih kedua pendekatan tersebut sehingga diperoleh

$$E_n = z_{k+1} - y_{k+1}. \tag{2.13.31}$$

Nilai galat ini digunakan untuk menyesuaikan ukuran langkah adaptif h pada iterasi berikutnya agar tingkat ketelitian numerik dapat dipertahankan.

2.14 *Software*

Software yang digunakan dalam penelitian sebagai berikut:

1. MATLAB (*Matrix Laboratory*) merupakan perangkat lunak yang cocok dipakai sebagai alat komputasi yang melibatkan penggunaan matriks dan vektor (Siang, 2009).
2. Python dapat digunakan untuk memvisualisasikan grafik model yang rumit atau kompleks (Saharuddin & Prihatmono, 2022).
3. Mathematica memiliki kemampuan mengkombinasikan manipulasi simbolik, matematika numerik, luar biasa tampilan grafiknya, dan bahasa pemrograman yang canggih (Abell & Braselton, 2004).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2025/2026 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Alat dan Bahan Penelitian

Alat yang digunakan untuk penelitian berupa software MATLAB, Phyton, dan Mathematica.

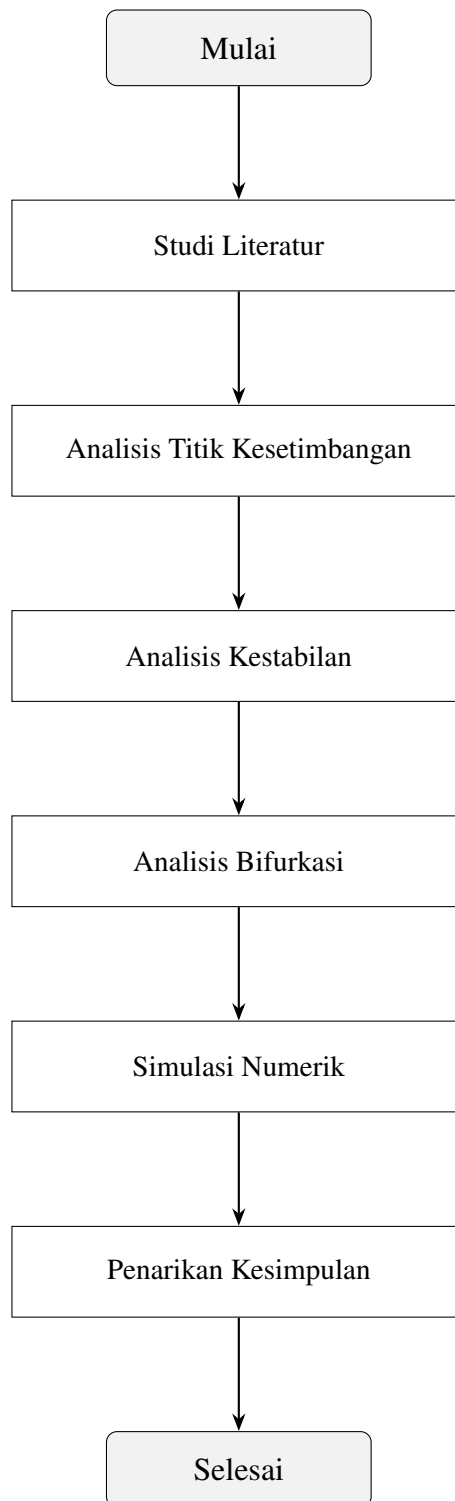
Bahan yang digunakan untuk penelitian berupa parameter sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} r = 0.35, & \alpha_1 = 0.26, & \alpha_2 = 0.17, \\ a_1 = 0.21, & a_2 = 0.21, & \delta_1 = 0.11, \\ \delta_2 = 0.11, & m = 0.25, & \gamma = 0.21, \\ \gamma_1 = 0.19, & \gamma_2 = 0.41, & w_0 = 3. \\ s = 2.86, & d = 0.41, & \end{array}$$

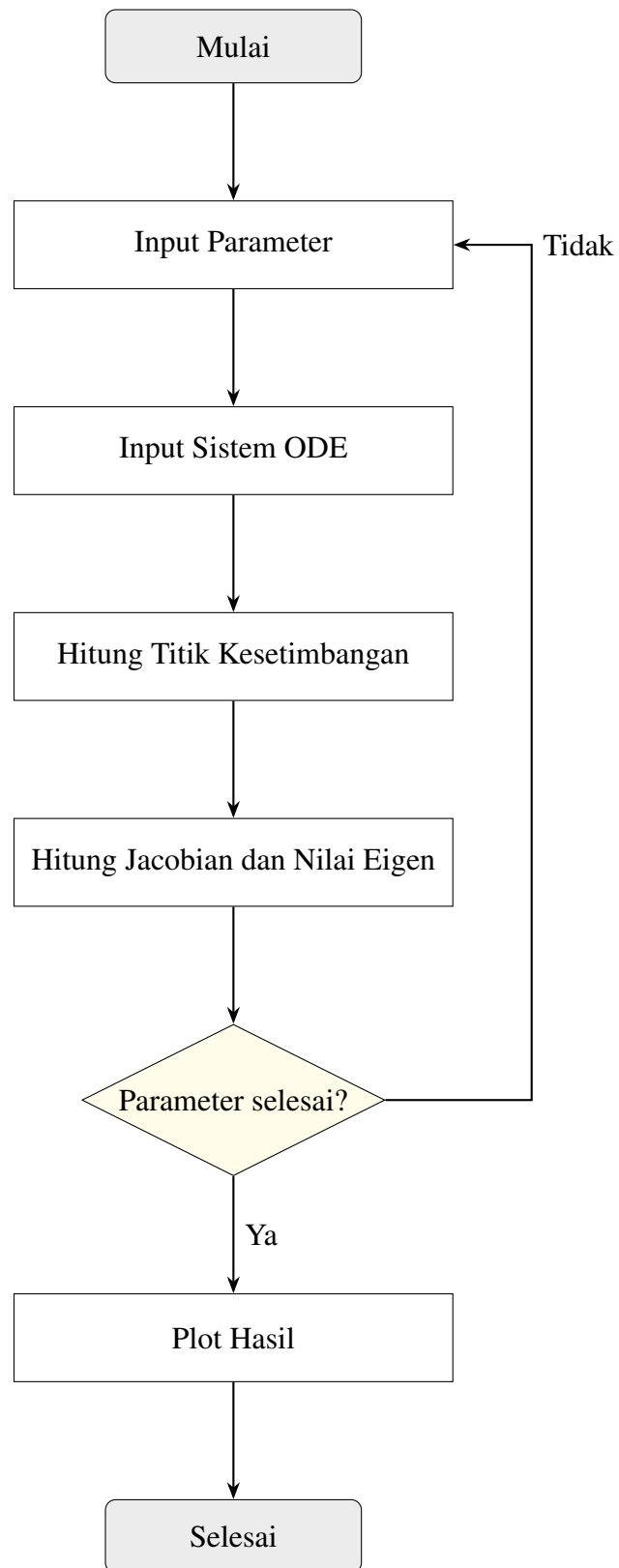
3.3 Metode Penelitian

Tahapan-tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan berbagai bahan pustaka berupa buku, jurnal, serta artikel nasional maupun internasional yang membahas tentang sistem Dinamik dan Bifurkasi, serta referensi yang berkaitan dengan pemrograman MatLab.
2. Mempelajari sistem Dinamik dan Bifurkasi, berdasarkan bahan pustaka yang telah diperoleh.
3. Membuat program menggunakan *software* untuk membantu penyelesaian permasalahan sistem dinamik.
4. menguji parameter pada model sebagai uji coba untuk mengetahui apakah terdapat bifurkasi dalam model yang dipakai
5. Menganalisis hasil pemrograman untuk mengetahui adanya kesalahan maupun kekurangan dalam program yang telah dibuat.
6. Menyusun kesimpulan berdasarkan hasil Visualisasi yang diperoleh.



Gambar 3.1 Diagram alur penelitian



Gambar 3.2 Diagram alur pemrograman

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Penelitian ini membahas dinamika dan bifurkasi pada model plankton-oksigen tiga dimensi yang melibatkan interaksi antara fitoplankton, zooplankton, dan oksigen. Model tersebut diformulasikan dalam bentuk eksplisit dan dianalisis menggunakan metode numerik untuk mengkaji perilaku dinamika sistem. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pada nilai parameter tertentu, sistem berada pada kondisi stabil yang ditandai dengan trajektori sistem yang menuju titik ekuilibrium.

Melalui variasi parameter tertentu, sistem mengalami bifurkasi Hopf yang menyebabkan perubahan perilaku dari kondisi stabil menjadi osilasi periodik. Perbedaan dinamika sistem sebelum dan sesudah terjadinya bifurkasi Hopf dapat diamati secara jelas melalui visualisasi trajektori, deret waktu (*time series*), dan *Poincaré Section*. Selain itu, analisis hubungan antara fitoplankton-oksigen, oksigen-zooplankton, serta fitoplankton-zooplankton menunjukkan adanya dinamika nonlinier yang kompleks dalam sistem plankton-oksigen tiga dimensi.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan model plankton-oksigen dengan menambahkan faktor lingkungan lain, seperti nutrien, suhu, atau intensitas cahaya, agar model yang dihasilkan lebih mendekati kondisi ekosistem perairan yang sebenarnya. Selain itu, analisis dinamika sistem dapat diperluas dengan mengkaji jenis bifurkasi lain atau perilaku chaos guna memperoleh pemahaman yang lebih mendalam terhadap kompleksitas dinamika sistem. Penggunaan dan perbandingan beberapa metode numerik juga disarankan untuk meningkatkan akurasi dan kestabilan hasil simulasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Ali, A., Jawad, S., & Chen, F. (2024). *Stability and bifurcation analysis of the impact of refuge on the dissolved oxygen–plankton interaction*. *Ibn Al-Haitham Journal for Pure and Applied Sciences*, 37(4), 370–379.
- Abell, M. L., & Braselton, J. P. (2004). *Mathematica by example*. Elsevier Academic Press.
- Anton, H. (1992). *Aljabar linear elementer* (Edisi ke 5). Erlangga.
- Basrina, H., Yulida, Y., & Thresye. (2016). *Solusi dari Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde 2 dalam Bentuk Polinomial Taylor*. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan “Epsilon,”* 10(2), 28–37.
- Cahyono, E. (2013). *Pemodelan Matematika* (Edisi pertama). Yogyakarta: Graha Ilmu. ISBN 978-602-262-100-3.
- Dhar, J., & Baghel, R. S. (2016). *Role of dissolved oxygen on the plankton dynamics in spatio-temporal domain*. *Modeling Earth Systems and Environment*, 2(1), 1–15.
- Forrester, J. W. (1961). *Industrial Dynamics*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Hutabarat, C. M., & Sinaga, L. P. (2023). *Bifurkasi Hopf pada model dinamika SEIR penyebaran Covid-19 di Indonesia*. *KARISMATIKA: Jurnal Ilmiah Matematika*, 8(2), 9–23.
- Hutagalung, S. N. (2017). *Pemahaman metode numerik (studi kasus metode Newton–Raphson) menggunakan pemrograman MATLAB*. *Jurnal Teknologi Informasi (JurTI)*, 1(1), 95–100.
- Kuznetsov Y.A, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd ed., Springer, 2004.
- Lynch, S. (2010). *Dynamical Systems with Applications using Maple* (2nd ed.). Berlin: Springer.
- Mathews J.H., and Fink K.D., *Numerical Methods Using MATLAB*, 4th ed., Pearson Education, 2004. ISBN: 0-13-065248-2.

- Maya, R. (2021). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jawa Barat: IKIP Siliwangi.
- Misra, A. K., Chandra, P., & Raghavendra, V. (2011). *Modeling the depletion of dissolved oxygen in a lake due to algal bloom: Effect of time delay*. *Advances in Water Resources*, 34(10), 1232–1238.
- Mokodimpit, F. (2013). *Analisis Model Predator–Prey Leslie–Gower*. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Universitas Negeri Gorontalo.
- Mondal, S., Samanta, G., & De la Sen, M. (2022). *Dynamics of oxygen–plankton model with variable zooplankton search rate in deterministic and fluctuating environments*. *Mathematics*, 10(16), 1641.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction*. Springer.
- Musli, A. M. (2015). Beberapa metode dalam menentukan solusi dari suatu fungsi kubik. *Jurnal Saintifik*, 1(1).
- Olsder G.J., and vander Woude J., *Mathematical Systems Theory*, Fourth Edition (Revised Lecture Notes), Delft University of Technology, 2011.
- Pamuntjak, R. J., & Santosa, W. (1990). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jawa Barat: Institut Teknologi Bandung.
- Panigoro, H. S. (2014). *Analisis Dinamik Sistem Predator–Prey Model Leslie–Gower dengan Pemanenan Secara Konstan terhadap Predator*. *Jurnal Euler*, 2(1), 1–12.
- Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer.
- Puspita, M. (2016). *Bentuk Normal Bifurkasi Hopf pada Sistem Umum Dua Dimensi*. *Jurnal Matematika UNAND*, 5(3), 15–23.
- Riduan, L., Hartono, Y., & Hiltrimartin, C. (2024). *Analisis kemampuan pemodelan matematika siswa pada materi aritmetika sosial*. *Kognitif: Jurnal Riset HOTS Pendidikan Matematika*, 4(4), 1434–1445.
- Rizal, S. (2006). *Kelimpahan fitoplankton di Sungai Talang dan Sungai Sarik tempat pembuangan limbah cair industri pengolahan kelapa sawit*. *Jurnal Sainmatika*, 3(1).
- Rosanti, D. (2006). *Kelimpahan plankton pada kawasan mangrove Taman Nasional Sembilang Kabupaten Banyuasin*. *Jurnal Sainmatika*, 3(1).

- Sa'adah, S., & Abadi, D. S. (2020). *Bifurkasi pada Model Interaksi Mangsa–Pemangsa dengan Perilaku Anti Pemangsa*. Prosiding Seminar Nasional Matematika, 3, 95–103.
- Saharuddin, S., & Prihatmono, M. W. (2022). *Pengenalan dan pelatihan dasar bahasa pemrograman Python pada siswa/i SMA Negeri 3 Makassar*. Jurnal Pengabdian Masyarakat Berkemajuan, 6(4), 2233.
- Sekerci, Y., & Petrovskii, S. (2015). *Mathematical modelling of plankton–oxygen dynamics under the climate change*. Bulletin of Mathematical Biology, 77(12), 2325–2353.
- Siang, J. J. (2009). *Jaringan Syaraf Tiruan dan Pemrogramannya Menggunakan MATLAB* (Edisi ke-2). Yogyakarta: Andi.
- Strogatz S.H, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2nd ed., Westview Press, 2015.
- Ubaidillah, F. (2024). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jember: Universitas Jember. ISBN 978-623-7973-23-2.
- Wahyuni, I. S., & Rosanti, D. (2016). *Keanekaragaman fitoplankton di kolam retensi Kambang Iwak Kota Palembang*. Sainmatika: Jurnal Ilmu Sains dan Matematika, 13(2), 48–57.
- Wirabhuana, A. (2009). *Introduction to System Dynamics*. Yogyakarta: Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.