II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Structural Equation Modeling* (SEM)

Pemodelan persamaan struktural (*Structural Equation Modeling,* SEM) adalah salah satu teknik peubah ganda yang dapat menganalisis secara simultan beberapa peubah laten *endogenous* dan *eksogenous* (Bollen, 1989). SEM dilakukan untuk menganalisis serangkaian hubungan secara simultan sehingga memberikan efisiensi secara statistik. Pendugaan atas persamaan regresi yang berbeda tetapi terkait satu sama lain secara bersama-sama dilakukan dengan model struktural dalam SEM (Hair *et.al.,* 2007). Dari segi metodologi, SEM memiliki beberapa peranan, di antaranya, sebagai sistem persamaan simultan, analisis kausal linear, analisis lintasan (*path analysis*), analisis struktur kovarians, dan model persamaan struktural (Wijanto, 2008).

Komponen-komponen yang terdapat dalam SEM yang menjadi karakteristik dalam model tersebut yaitu:

1) Variabel yaitu variabel laten dan variabel teramati.
2) Model yaitu model struktural dan model pengukuran.
3) Galat yaitu galat struktural dan galat pengukuran.

2.2 Variabel SEM

Variabel-variabel pada SEM masing-masing saling mempengaruhi. Variabel-variabel yang terdapat dalam SEM meliputi:

1) Variabel laten (*Latent Variable*)

Dalam SEM variabel yang menjadi perhatian adalah variabel laten. Variabel laten atau konstruk laten adalah variabel yang tidak terukur secara langsung, sebagai contoh: perilaku, sikap, perasaan, dan motivasi. Variabel laten terdapat dua jenis, yaitu:

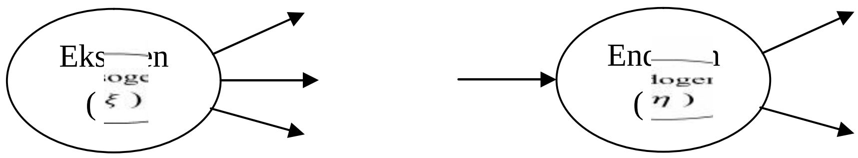
a) Eksogen

   Variabel laten eksogen dinotasikan dengan huruf Yunani adalah ξ “ksi”. Variabel bebas (*independenet latent variable*) pada semua persamaan yang ada pada SEM, dengan simbol lingkaran dengan anak panah menuju keluar.

b) Endogen

   Variabel laten endogen dinotasikan dengan huruf Yunani adalah η “eta”. Variabel terikat (*dependent latent variable*) pada paling sedikit satu persamaam dalam model, dengan simbol lingkaran dengan anak panah menuju keluar dan satu panah ke dalam. Simbol anak panah untuk menunjukkan adanya hubungan kausal (ekor anak panah untuk hubungan penyebab dan kepala anak panah untuk variabel akibat).

Pemberian nama variabel laten pada diagram lintasan bisa mengikuti notasi matematiknya (ksi atau eta) atau sesuai dengan nama dari variabel dalam penelitian.



Gambar 1 Variabel Laten Eksogen dan Endogen

2) Variabel teramati (*Observed* atau *Measured* atau *Manifest Variable*)

Variabel teramati adalah variabel yang dapat diamati atau dapat diukur secara empiris dan disebut sebagai indikator. Variabel teramati merupakan efek atau ukuran dari variabel laten. Variabel teramati yang berkaitan dengan variabel eksogen diberi notasi matematik dengan label X, sedangkan yang berkaitan dengan dengan variabel laten endogen diberi label Y. Disimbolkan dengan bujur sangkar atau kotak, variabel ini merupakan indikator. Pemberian nama variabel teramati pada diagram lintasan bisa mengikuti notasi matematiknya atau nama/kode dari pertanyaan-pertanyaan pada kuisioner.

2.3 Model SEM

Model-model yang terdapat dalam SEM meliputi:

1) Model struktural

Model struktural bertujuan untuk memeriksa hubungan yang mendasari atau yang menyusun variabel laten ke dalam model pengukuran dan variabel konstruk lainnya berdasarkan teori. Parameter yang menunjukkan regresi variabel laten eksogen diberi label dengan huruf Yunani γ ("gamma"), sedangkan untuk regresi variabel laten endogen diberi label dengan huruf Yunani β ("beta"), dan matriks kovarians variabel-variabel laten eksogen diberi label dengan huruf Yunani Φ ("phi").

Model variabel laten adalah:

$$\eta_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1 \quad (2.1)$$

$$\eta_2 = \beta_{21}\eta_1 + \gamma_{21}\xi_1 + \zeta_2 \quad (2.2)$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\end{bmatrix}[\xi_1] + \begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Dapat ditulis:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{B\eta} + \boldsymbol{\Gamma\xi} + \boldsymbol{\zeta} \quad (2.4)$$

di mana:

- variabel

  η : (berukuran m x 1) variabel laten endogen (*dependent*)

  $\boldsymbol{\xi}$: (berukuran n x 1) variabel laten eksogen

  $\boldsymbol{\zeta}$: (berukuran m x 1) galat struktural

- koefisien

  B : matriks (berukuran m x m) koefisien untuk variabel laten endogen

  Γ : matriks (berukuran m x n) koefisien untuk variabel laten eksogen

dengan asumsi:

$E(\eta) = 0, E(\xi) = 0, E(\zeta) = 0$

ζ tidak berkorelasi dengan ξ

(**I – B**) nonsingular

2) Model pengukuran

Model pengukuran digunakan untuk menduga hubungan antar variabel laten dengan variabel-variabel teramatinya. Variabel laten dimodelkan sebagai sebuah faktor yang mendasari variabel-variabel teramati yang terkait. Muatan-muatan faktor atau *factor loadings* yang menghubungkan variabel laten dengan variabel-variabel teramati disimbolkan dengan huruf Yunani λ (“lambda”).

Pada model variabel laten SEM, hubungan kausal (sebab-akibat) terjadi diantara variabel-variabel tidak teramati (*unobserved variables*) atau variabel-variabel laten. Parameter-parameter dari persamaan pada model pengukuran SEM merupakan *factor loadings* dari variabel laten terhadap indikator-indikator atau variabel-variabel teramati yang terkait. Model SEM memberikan informasi tentang hubungan kausal simultan di antara variabel-variabelnya, memberikan informasi tentang muatan faktor dan galat-galat pengukuran.

Berdasarkan contoh dalam Bollen (1989) diberikan model pengukuran yaitu:

$$x_1 = \lambda_1\xi_1 + \delta_1$$
$$x_2 = \lambda_2\xi_1 + \delta_2 \tag{2.5}$$
$$x_3 = \lambda_3\xi_1 + \delta_3$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_4\eta_1 + \varepsilon_1, & y_5 &= \lambda_8\eta_2 + \varepsilon_5 \\ y_2 &= \lambda_5\eta_1 + \varepsilon_2, & y_6 &= \lambda_9\eta_2 + \varepsilon_6 \\ y_3 &= \lambda_6\eta_1 + \varepsilon_3, & y_7 &= \lambda_{10}\eta_2 + \varepsilon_7 \\ y_4 &= \lambda_7\eta_1 + \varepsilon_4, & y_8 &= \lambda_{11}\eta_2 + \varepsilon_8 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Persamaan model pengukuran dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda_x}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Lambda_y}\,\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.8}$$

dimana,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda_x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = [\xi_1], \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \tag{2.9.a}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda_y} = \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 \\ \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \\ \lambda_7 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ 0 & \lambda_9 \\ 0 & \lambda_{10} \\ 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_4 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_5 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_6 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_7 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_8 \end{bmatrix} \qquad (2.9.b)$$

di mana,

- Variabel

$\boldsymbol{x}$: (berukuran q x 1) indikator variabel laten eksogen dari ξ

$\boldsymbol{y}$: (berukuran p x 1) indikator variabel laten endogen dari η

$\boldsymbol{\delta}$: (berukuran q x 1) galat pengukuran dari x

$\boldsymbol{\varepsilon}$: (berukuran p x 1) galat pengukuran dari y

- koefisien

$\boldsymbol{\Lambda_x}$: (berukuran q x n) matriks koefisien berkaitan dengan x dan ξ

$\boldsymbol{\Lambda_y}$: (berukuran p x m) matriks koefisien berkaitan dengan y dan η

dengan asumsi:

$E(\eta) = 0, E(\xi) = 0, E(\varepsilon) = 0, E(\delta) = 0$

ε tidak berkorelasi dengan η, ξ, dan δ

δ tidak berkorelasi dengan ξ, η, dan ε

2.4 Galat SEM

Galat yang terdapat dalam SEM meliputi:

1) Galat Struktural (*Structural Error*)

Dilambangkan dengan ζ "zeta", untuk memperoleh estimasi parameter yang konsisten, galat struktural diasumsikan tidak berkorelasi dengan variabel-variabel eksogen dari model. Walaupun begitu, galat struktural bisa dimodelkan berkorelasi dengan galat struktural yang lain.

2) Galat Pengukuran (*Measurement Error*)

Variabel teramati X dilambangkan dengan δ "delta" dan variabel teramati Y dilambangkan dengan ε "epsilon". Matriks kovarians dari δ diberi tanda dengan huruf Yunani Θ_δ "theta delta" dan untuk matriks kovarians dari ε yaitu Θ_ε "theta epsilon". Galat pengukuran berpengaruh pada penduga parameter dan besar kecilnya varians. Hal ini dapat diatasi oleh SEM melalui persamaan-persamaan yang ada pada model pengukuran.

2.5 Jenis SEM

Berikut ini jenis-jenis yang digunakan dalam model persamaan struktural:

1) Diagram *Path*

Diagram *path* adalah representasi grafis dari sebuah model yang menggambarkan seluruh hubungan antara variabel-variabel yang ada di dalamnya. Variabel-variabel yang terdapat dalam diagram *path* adalah variabel teramati dan tidak mengandung variabel laten. Diagram *path* dibuat untuk mempermudah melihat hubungan yang ada pada model.

2) *Confirmatory Factor Analysis* (CFA)

Analisis faktor konfirmatori atau *Confirmatory Factor Analysis* (CFA) dalam SEM merupakan model pengukuran sebuah variabel laten diukur oleh satu atau lebih variabel-variabel teramati. CFA didasarkan pada variabel-variabel teramati adalah indikator-indikator tidak sempurna dari variabel laten atau konstruk tertentu yang mendasarinya. Karakteristik dalam model CFA yaitu:

a. Model dibentuk lebih dahulu.

b. Jumlah variabel laten ditentukan oleh analisis.
c. Pengaruh suatu variabel laten terhadap variabel teramati ditentukan lebih dahulu.
d. Beberapa efek langsung variabel laten terhadap variabel teramati dapat ditetapkan sama dengan nol atau konstan.
e. Galat pengukuran boleh berkorelasi.
f. Kovarians variabel-variabel laten dapat diestimasi atau ditetapkan pada nilai tertentu.
g. Identifikasi parameter diperlukan.

2.6 Prosedur SEM

Suatu model dikatakan baik jika dapat mendeskripsikan suatu kejadian yang sebenarnya dengan galat yang kecil. Munculnya galat tidak dapat dihindari karena kejadian sebenarnya sangat kompleks sedangkan model hanya menjelaskan hubungan pokoknya saja. Detail dari kejadian yang tidak bisa dijelaskan oleh model akan masuk dalam komponen galat (residual). Terkait dengan data dapat dinyatakan dengan:

$$\text{Data} = \text{Model} + \text{Residual}$$

di mana:

Data adalah nilai pengukuran yang berkaitan dengan variabel-variabel teramati dan membentuk sampel penelitian.

Residual adalah perbedaan antara model yang dihipotesiskan dengan data yang diamati.

Model adalah model yang dihipotesiskan atau dispesifikasikan oleh peneliti.

Jika nilai residual mendekati 0 (nol), maka kecocokan data-model yang dihasilkan baik.

Dalam SEM, selain data mentah, matriks kovarians dan matriks korelasi dari variabel yang diuji dapat digunakan sebagai input. Matriks kovarians adalah matriks yang terdiri dari nilai kovarians antara semua indikator setiap variabel.

2.6.1 Hipotesis Fundamental

Hipotesis fundamental dalam prosedur SEM adalah bahwa matriks kovarians data dari populasi ∑ (matriks kovarians variabel teramati) adalah sama dengan matriks kovarians yang diturunkan dari model ∑(θ). Jika model yang dispesifikasikan benar dan jika parameter - parameter (θ) dapat diestimasi nilainya, maka matriks kovarians populasi (∑) dapat dihasilkan kembali dengan tepat. Formulasi dari hipotesis fundammental yaitu:

$$H_0 : \sum = \sum(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.10}$$

di mana,

∑ = matriks kovarians populasi dari variabel-variabel teramati

∑(θ) = matriks kovarians dari model dispesifikasikan

θ = vektor yang berisi parameter-parameter model tersebut

Pada uji hipotesis terhadap hipotesis fundamental, hipotesis harus menghasilkan tidak tolak H_0. Hal ini dilakukan agar didapatkan nilai residual sama dengan nol atau $\sum = \sum(\boldsymbol{\theta})$. Berbeda dengan pada uji hipotesis statistik pada umumnya yang menginginkan H_0 ditolak. Dengan tidak ditolaknya H_0, itu berarti bahwa data mendukung model yang kita spesifikasikan (Bollen, 1989).

2.6.2 Tahapan dalam Prosedur SEM

Tahapan-tahapan SEM secara umum yaitu sebagai berikut:

1) Spesifikasi model
2) Identifikasi
3) Estimasi atau pendugaan parameter
4) Uji kecocokan (*fit*)
5) Respesifikasi

2.7 Spesifikasi Model

Langkah ini merupakan langkah dalam melakukan identifikasi terhadap permasalahan penelitian, sehingga hubungan antar variabel-variabel yang dihipotesiskan harus didukung oleh teori yang kuat. Spesifikasi model tersebut berdasarkan teori atau penelitian sebelumnya atau bisa juga dengan menggunakan diagram *path*.

Langkah-langkah memperoleh model yaitu:

1) Spesifikasi model pengukuran, yaitu dengan cara:
   a) Mendefinisikan variabel laten yang ada dalam penelitian.
   b) Mendefinisikan variabel teramati.
   c) Mendefinisikan hubungan antara setiap variabel laten dengan variabel teramati yang terkait.
2) Spesifikasi model struktural

   Dengan cara mendefinisikan hubungan kausal di antara variabel laten.

3) Gambar diagram *path* dari model *hybrid*

   Model *hybrid* adalah bentuk umum dari SEM yang merupakan kombinasi model pengukuran dan struktural. Model *hybrid* mengandung variabel-variabel laten maupun variabel-variabel teramati yang terkait.

2.8 Identifikasi

Tujuan dari dilakukannya identifikasi model yaitu untuk menentukan analisis dapat dilakukan lebih lanjut atau tidak, maka identifikasi model perlu dilakukan. Berikut ini kategori hasil identifikasi model dalam SEM yaitu:

1) *Under-Identified*, yaitu model dengan jumlah parameter yang diestimasi lebih besar dari jumlah data yang diketahui. Nilai *df* pada model ini adalah kurang dari 0 (nol)/negatif.
2) *Just-Identified*, yaitu model dengan jumlah parameter yang diestimasi sama dengan data yang diketahui. Nilai *df* pada model ini adalah 0 (nol).
3) *Over-Identified*, yaitu model dengan jumlah parameter yang diestimasi lebih kecil dari jumlah data yang diketahui. Nilai *df* pada model ini adalah lebih dari 0 (nol)/positif.

Analisis dalam SEM dapat dilakukan jika model yang diperoleh adalah *Over-Identified* dan SEM menghindari model *Under-Identified* agar data dapat dianalisis. Pada saat identifikasi kemungkinan diperoleh nilai unik untuk setiap parameter.

2.9 Pendugaan Parameter

Estimasi terhadap model dilakukan untuk menghasilkan nilai-nilai parameter. Jenis galat estimasi yang sering terjadi dalam SEM yaitu besar varians dari suatu variabel bernilai negatif. Varians adalah rata-rata dari jumlah kuadrat deviasi. Sumber-sumber galat yang sering terjadi dalam SEM yaitu (Hair *et. al.*, 1989):

1) Banyaknya parameter yang diestimasi relatif terhadap varians-kovarians matriks sampel.
2) Penggunaan efek timbal-balik (*reciprocal effect*).
3) Kegagalan dalam menetapkan skala dari konstruk.

Pendugaan parameter dalam SEM dapat digunakan untuk memperoleh dugaan dari setiap parameter yang dispesifikasikan dalam model yang membentuk matriks $\sum$ sedemikian sehingga nilai parameter sedekat mungkin dengan nilai yang ada dalam matriks S (matriks kovarians dari sampel). Metode-metode yang digunakan dalam SEM yaitu *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), *Weighted Least Square* (WLS), *Ordinary Least Square* (OLS), *Unweighted Least Square* (ULS), *Generalized Least Square* (GLS), *Instrument Variable* (IV), *Two Stage Least Square* (TSLS), dan *Diagonally Weighted Least Square* (DWLS).

2.9.1 Metode *Maximum Likelihood Estimation*

Maximum Likelihood Estimation (MLE) akan meminimisasi fungsi $F(S;\sum(\theta))$ sebagai berikut:

$$F_{ML} = \log|\sum(\boldsymbol{\theta})| + \mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\sum{}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right) - \log|\mathbf{S}| - (p + q) \qquad (2.11)$$

$\sum(\boldsymbol{\theta})$ = matriks kovarians yang diturunkan dari model

S = matriks kovarians sampel yang diobservasi

$\mathbf{p+q}$ = banyaknya variabel indikator

di mana diasumsikan $\sum(\boldsymbol{\theta})$ dan $\boldsymbol{S}$ adalah definit positif, X dan Y adalah distribusi multinormal, dan $\boldsymbol{S}$ distribusi *Wishart* (Bollen, 1989). Sedangkan $\mathbf{p+q}$ adalah banyaknya variabel teramati (X dan Y) dalam model.

Misalkan Y dan X variabel acak multinormal iid (*independently and identically distributed*) berukuran N, dikombinasikan dalam persamaan tunggal (p+q) x 1 vektor z, di mana z terdiri dari nilai turunan. Maka fkp dari z adalah:

$$f(z;\Sigma) = (2\pi)^{-(p+q)/2}|\Sigma|^{-1/2}exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)z'\Sigma^{-1}z\right] \qquad (2.12)$$

dengan fungsi *likelihood*,

$$L(\theta) = \prod_{i=0}^{N} f(z;\Sigma)$$
$$= (2\pi)^{-N(p+q)/2}|\Sigma|^{-N/2}exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{N} z_i{}'\Sigma^{-1}z_i\right]$$

Substitusikan $\Sigma(\theta)$ untuk Σ berdasarkan hipotesis fundamental persamaan (2.10).

$$L(\theta) = (2\pi)^{-N(p+q)/2}|\Sigma(\theta)|^{-N/2}exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{N} z_i{}'\Sigma^{-1}(\theta)z_i\right]$$

Log pada fungsi *likelihood* adalah:

$$\log L(\theta) = \frac{-N(p+q)}{2}\log(2\pi) - \frac{N}{2}\log|\Sigma(\theta)| - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} z_i{}'\Sigma^{-1}(\theta)z_i$$

$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} z_i{}'\Sigma^{-1}(\theta)z_i$ diuraikan sebagai berikut:

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} z_i{}'\Sigma^{-1}(\theta)z_i = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} tr\ [z_i{}'\Sigma^{-1}(\theta)z_i]$$
$$= -\frac{N}{2}\sum_{i=0}^{N} tr\ [N^{-1}z_i{}'z_i\Sigma^{-1}(\theta)]$$
$$= -\frac{N}{2} tr\ S^*\Sigma^{-1}(\theta)$$

Di mana $S^* = N^{-1}z_i{}'z_i$ adalah sampel penduga MLE dari matriks kovarians

Nilai $\frac{-N(p+q)}{2}$ adalah konstan karena tidak berpengaruh terhadap penurunan θ, sehingga,

$$\log L(\theta) = konstan - \frac{N}{2}\log|\Sigma(\theta)| - \frac{N}{2} tr\ S^*\Sigma^{-1}(\theta)$$

$$= konstan - \frac{N}{2}\{\log|\Sigma(\theta)| + tr\, S^{*}\Sigma^{-1}(\theta)\}$$

$\log L(\theta) = 0$ pada saat $S = \Sigma(\theta) = 0$

$$konstan = \frac{N}{2}\{\log|S| + tr\, S^{*}S^{-1}\}$$
$$= \frac{N}{2}\{\log|S| + (p + q)\}$$

$$\log L(\theta) = \frac{N}{2}\{\log|S| + (p + q)\} - \frac{N}{2}\{\log|\Sigma(\theta)| + tr\, S^{*}\Sigma^{-1}(\theta)\}$$
$$= -\frac{N}{2}\{\log|\Sigma(\theta)| + tr\, S^{*}\Sigma^{-1}(\theta) - \log|S| - (p + q)\}$$

Sehingga,

$$F_{ML} = \log|\Sigma(\boldsymbol{\theta})| + \mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\,\Sigma^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\theta})\right) - \log|\mathbf{S}| - (p + q)$$

$\{-\log|\mathbf{S}| - (p + q)\}$ tidak mempengaruhi $\hat{\theta}$ karena S dan (p+q) konstan. Hanya (-N/2) yang bersyarat dalam log L(θ) tetapi tidak dalam F_{ML} yang berperan untuk meminimumkan daripada memaksimalkan F_{ML} karena merubah tanda negatif menjadi positif.

F_{ML} sama dengan nol ketika $\hat{\Sigma} = \boldsymbol{S}$, untuk mebuktikannya substitusikan $\hat{\Sigma}$ untuk $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ dan $\hat{\Sigma} = \boldsymbol{S}$ dalam (2.11). Sehingga,

$$F_{ML} = \log|\hat{\Sigma}| + \mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\hat{\Sigma}^{-1}\right) - \log|\mathbf{S}| - (p + q)$$
$$= \log|\boldsymbol{S}| + \mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\boldsymbol{S}^{-\mathbf{1}}\right) - \log|\mathbf{S}| - (p + q)$$
$$= \log|\boldsymbol{S}| + \mathrm{tr}(\mathbf{I}) - \log|\mathbf{S}| - (p + q)$$

di mana $tr(\boldsymbol{I}) = p + q$

$$F_{ML} = \log|\boldsymbol{S}| + (p + q) - \log|\mathbf{S}| - (p + q)$$
$$= 0$$

Ketika model diprediksi secara sempurna dengan nilai matriks kovarians sampel, maka kecocokan yang sangat baik diindikasikan dengan nilai nol (Bollen, 1989).

Menurut Bollen (1989) terdapat beberapa karakteristik dari MLE yaitu:

1) Tidak bias asimtotik, walaupun penduga tersebut mungkin bias untuk sampel yang berukuran kecil.
2) Konsisten.
3) Efisien asimtotik.

Kekurangan yang perlu diperhatikan dalam metode MLE yaitu ketika tidak normal, maka dapat mengancam validitas dari uji signifikansi MLE. Bollen (1989) menyarankan beberapa alternatif untuk mengatasi hal tersebut, yaitu:

1) Mentransformasikan variabel sehingga mempunyai multinormalitas yang lebih baik dan menghilangkan kurtosis yang berlebihan.
2) Menyediakan penyesuaian pada uji statistik dan galat standar biasa sehingga hasil modifikasi uji sigifikan dari F_{ML} adalah asimtotik benar (*assimptotically correct*).
3) Menggunakan prosedur resampling *Bootstrap*.
4) Menggunakan *estimator* alternatif yang menerima ketidaknormalan (*nonnormality*) dan *estimator* tersebut *asymptotically efficient*. Penduga *Weighted Least Square* (WLS) adalah salah satu metode tersebut.

2.10 Karakteristik Penduga

Untuk mengkaji karakteristik penduga dengan menggunakan metode MLE, maka harus memenuhi sifat-sifat penduga yang baik berikut ini:

1) Tak Bias

Tak bias merupakan salah satu karakteristik yang diinginkan bagi suatu penduga parameter.

Definisi 2.1

Penduga $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dikatakan penduga tak bias bagi $g(\theta)$ jika $E\big(U(\boldsymbol{X})\big) = g(\theta)$.

2) Konsisten

Pada sifat konsisten penduga bagi parameter, saat ukuran sampel semakin besar maka penduga tersebut akan semakin mendekati parameter populasi yang sesungguhnya.

Definisi 2.2

$U(X)$ dikatakan sebagai penduga konsisten bagi $g(\theta)$ jika $U(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{P} g(\theta)$ untuk $n \to \infty$, $\forall\theta \in \boldsymbol{\Omega}$ yaitu bila:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\theta)| \geq \varepsilon\} = 0$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\theta)| < \varepsilon\} = 1$$

Teorema 2.1 *(Chebyshev's Inequality)*

Misalkan X variabel acak dengan rata-rata μ dan ragam σ^2 untuk setiap nilai $k > 0$, maka:

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

atau

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

(Hogg dan Craig, 1995).

3) Efisien

Penduga yang memberikan varians minimum disebut penduga efisien.

Definisi 2.3

Misalkan X penduga tak bias bagi parameter θ. X disebut penduga yang efisien bagi θ jika dan hanya jika varians dari X mencapai batas bawah Rao-Cramer.

Definisi lain yang berhubungan dengan efisien yaitu sebagai berikut:

a. Informasi *Fisher*

Definisi 2.4

Misalkan X variabel acak dengan fungsi kepekatan $f(x;\theta), \theta \in \Omega$. Informasi *Fisher* dinotasikan dengan I(θ), di mana:

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

atau

$$I(\theta) = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right\}$$

(Hogg dan Craig, 1995).

b. Matriks Informasi Fisher

Definisi 2.5

Misalkan sampel acak X_1, X_2, …, X_n dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan $f(x;\theta_1;\theta_2), \theta_1;\theta_2 \in \Omega$. Misalkan ruang dari X dimana $f(x;\theta_1;\theta_2) > 0$ tidak meliputi $\theta_1$dan θ_2 dapat diturunkan di bawah integralnya. Sehingga matriks Informasi *Fisher* sebagai berikut:

$$I_n = -n\begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_2^2}\right] \end{bmatrix}$$

(Hogg dan Craig, 1995).

c. *Cramer-Rao Lower Bound* (CRLB)

Definisi 2.6

Pertidaksamaan CRLB didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma_Y^2 \geq \frac{\left[k'(\theta)\right]^2}{nE\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right)^2\right]} = \frac{[k'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

Jika $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ adalah penduga tak bias dari θ, maka k(θ) = θ, mengakibatkan pertidaksamaan CRLB dengan $k'(\theta)$ adalah sebagai berikut:

$$\sigma_U^2 \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

Jika σ_U^2 sama dengan batas bawah Rao-Cramer, maka *U(X)* adalah penduga yang efisien (Hogg dan Craig, 1995).

2.11 *Bootstrap*

Bootstrap adalah salah satu prosedur dalam statistika untuk melihat tingkat ketidakpastian dari hasil estimasi. *Bootstrap* meliputi langkah-langkah memilih sampel secara random dari suatu set data dengan pengembalian dan melakukan analisis setiap sampel dengan cara yang sama. Setiap sampel yang diambil dikembalikan sebelum mengambil sampel berikutnya. Dengan demikian, satu titik data sangat mungkin untuk terambil lebih dari sekali dalam satu sampel *bootstrap*. Jumlah elemen dalam setiap sampel sama dengan jumlah elemen dari set data aslinya. Tujuan dari *bootstrap* yaitu memperbaiki ukuran sampel untuk mengevaluasi kebenaran dalam situasi yang tidak standar.

Bootstrap merupakan sebuah pendekatan untuk membuktikan kebenaran model multivariat dengan menggambarkan sejumlah besar subsampel dan menduga model untuk setiap subsampel. Pendugaan dari semua subsampel kemudian digabungkan, tidak hanya menyediakan pendugaan koefisien terbaik. Pendekatan ini tidak bergantung pada asumsi statistik tentang populasi untuk menilai signifikansi statistik, melainkan membuat penilaiannya hanya berdasarkan data sampel (Hair *et.al*., 2007).

Salah satu bentuk aplikasi metode *resampling bootstrap* adalah mengestimasi selang kepercayaan dari parameter sampel. Pada kasus selang kepercayaan dan pengujian hipotesis pengambilan sampel *bootstrap* paling sedikit sebanyak 1000 replikasi *bootstrap* (Chernick, 2007).

Pendugaan *bootstrap* dapat diperoleh dengan cepat tanpa iterasi untuk beberapa model persamaan struktural yang berguna pada tahap awal penelitian. Metode *bootstrap* dapat menghasilkan nilai standar eror. Nilai standar eror digunakan untuk menentukan sebuah parameter yang diuji signifikan atau tidak. Sayangnya, metode *bootstrap* memerlukan data yang lengkap.

2.12 Uji kecocokan (*fit*)

Setelah melakukan estimasi yang menghasilkan nilai parameter, perlu dilakukan pemeriksaan tingkat kecocokan. Antara variabel dengan data digunakan GOF (*Goodness of Fit*) untuk mengukur kecocokan model yaitu RMSEA (*Root Mean Square Error of Approximation*). RMSEA mirip dengan *Chi-square* yang terkoreksi dengan ukuran sampel. RMSEA mengukur penyimpangan nilai parameter suatu model dengan matriks kovarians populasinya.

RMSEA $\leq$ 0.05 menunjukkan *close fit*

0.05 < RMSEA $\leq$ 0.08 menunjukkan *good fit*

0.08 < RMSEA $\leq$ 0.1 menunjukkan *mediocre (marginal) fit*

$0.1 < RMSEA$ menunjukkan *poor fit*

2.13 Respesifikasi

Respesifikasi merupakan langkah selanjutnya setelah melakukan uji kecocokan. Respesifikasi adalah memodifikasi model. Jika model yang dihasilkan kurang sesuai, maka perlu dilakukan respesifikasi agar didapatkan model yang baik.