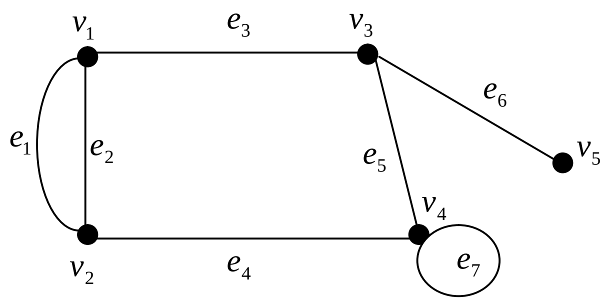
BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar teori graf dan bilangan kromatik lokasi sebagai landasan teori dari penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Graf

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Suatu graf G dinotasikan dengan *G = (V, E)* dibangun dari suatu himpunan V = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang menyatakan himpunan titik tak kosong dari G dan E = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ himpunan sisi yang merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik di *V*.



Gambar 1. Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Dua titik *u* dan *v* pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika dihubungkan oleh sebuah sisi *e*. Sisi *e* juga dikatakan menempel (*incident*) pada titik *u* jika titik *u* merupakan salah satu titik ujung dari sisi *e*. Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama pada suatu graf disebut sisi paralel *(multiple edges)*. Pada Gambar 1. titik v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_3. Sisi e_2 menempel pada v_1 dan v_2. Sisi paralel dari gambar tersebut adalah sisi e_1 dan e_2.

Derajat dari titik *v* suatu graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v yang dinotasikan dengan *d(v)*.Titik yang berderajat satu disebut dengan daun (*pendant*), sedangkan titik yang berderajat nol disebut dengan titik terasing (*isolated vertex*). Pada Gambar 1. $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 3$ dan v_5 adalah daun karena berderajat satu.

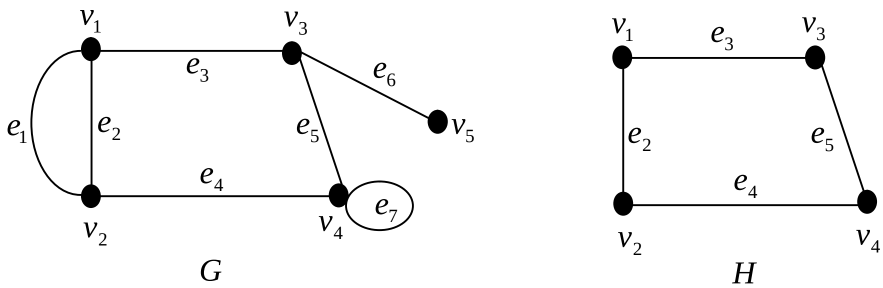
Loop merupakan sisi yang memiliki titik awal dan akhir yang sama. Pada suatu graf sederhana tidak terdapat *loop* maupun sisi paralel . Graf pada Gambar 1. bukan graf sederhana karena memiliki *loop* yaitu pada titik v_4, sedangkan sisi paralel yaitu e_1 dan e_2.

Jalan (*walk*) merupakan himpunan berhingga yang memuat titik dan sisi dari suatu graf dimana setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya Pada Gambar 1. contoh jalan adalah $v_2 - e_1 - v_1 - e_2 - v_2 - e_4 - v_4 - e_5 - v_3 - e_6 - v_5$.

Lintasan (*path*) adalah jalan yang semua sisi dan semua titik yang dilalui harus berbeda. Graf G dikatakan graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Pada Gambar 1. yang merupakan lintasan adalah $v_5 - e_6 - v_3 - e_3 - v_1 - e_1 - v_2 - e_4 - v_4$.

Siklus (*cycle*) merupakan lintasan tertutup yang memiliki titik awal dan akhir yang sama. Siklus dengan banyak titik genap disebut siklus genap, selain itu disebut siklus ganjil. Contoh siklus genap pada Gambar 1. adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_4 - v_4 - e_5 - v_3 - e_3 - v_1$.

Suatu graf H dikatakan subgraf dari G, dinotasikan dengan $H \subseteq G$ jika dan hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

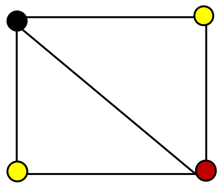


Gambar 2. $H \subseteq G$

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi

Pada bagian ini akan diberikan definisi yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf yang diambil dari Chartrand dkk.(2002). Bilangan kromatik lokasi merupakan pengembangan dari dua konsep dalam graf yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi graf.

Pewarnaan titik graf G adalah $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ dengan syarat dua titik yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai suatu graf itulah yang disebut bilangan kromatik dan dinotasikan dengan $\chi(G)$.



Gambar 3. Contoh graf berbilangan kromatik tiga

Selanjutnya diberikan definisi dan teorema mengenai bilangan kromatik lokasi. Konsep bilangan kromatik lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. (2002). Misalkan *c* suatu pewarnaan titik di G dan C_i merupakan himpunan titik yang diberi warna *i* , maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ merupakan himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna pada *V(G)*. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari *v* merupakan *k*-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \le i \le k$. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda maka *c* disebut pewarnaan lokasi dari G yang kemudian dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Berikut ini akan diberikan lemma dan teorema penting mengenai bilangan kromatik lokasi pada suatu graf yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk. (2002). Lingkungan dari suatu titik *v* pada graf G yang dinotasikan dengan *N(v)* adalah himpunan titik-titik di G yang bertetangga dengan *v*.

Teorema 2.1. Misalkan *c* adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika *u* dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga *d (u,w)* = *d (v,w)* untuk semua $w \in V(G) - \{u,v\}$ maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan *v* titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga *N(u)* = *N(v)* maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti:

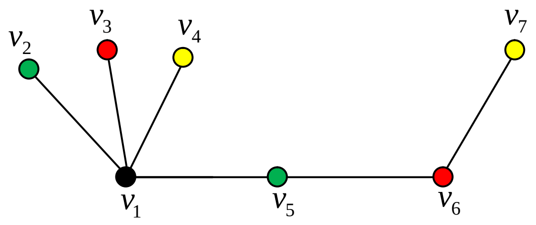
Misalkan c merupakan suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ merupakan partisi titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Jika *u,v* ∈ *V(G)*, misalkan *c(u)* = *c(v)* sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π maka $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Jika *d(u,w)* = *d(v,w)* untuk setiap w ∈ V(G) − {u,v}, maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap j ≠ i, 1 ≤ j ≤ k. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi *c(u)* ≠ *c(v).* ■

Akibat 2.1 Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti:

Misalkan v adalah titik yang bertetangga dengan k daun yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1 bahwa setiap pewarnaan lokasi pada graf G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $x_i, i = 1, 2, \dots, k$. Jika v bertetangga dengan semua x_i maka v harus memiliki warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Berikut ini diberikan contoh menentukan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf.



Gambar 4. Pewarnaan lokasi minimum pada graf G

Terlebih dahulu akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf G. Karena titik v_1 yang mempunyai 3 daun maka berdasarkan Akibat 2.1 , $\chi_L(G) \geq 4$ (1)

Selanjutnya ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf G. Titik-titik pada V(G) dipartisi sebagai berikut:

$C_1 = \{v_1\}$; $C_2 = \{v_2, v_5\}$; $C_3 = \{v_3, v_6\}$; $C_4 = \{v_4, v_2\}$. Kode warnanya adalah

$c_\Pi(v_1) = (0,1,1,1)$; $c_\Pi(v_2) = (1,0,2,2)$; $c_\Pi(v_3) = (1,2,0,2)$; $c_\Pi(v_4) = (1,2,2,0)$; $c_\Pi(v_5) = (1,0,1,2)$; $c_\Pi(v_6) = (2,1,0,1)$; $c_\Pi(v_7) = (3,2,1,0)$.

Karena semua titik di G mempunyai kode warna berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi . jadi, $\chi_L(G) \leq 4$ (2)

Berdasarkan Persamaan (1) dan (2), maka $\chi_L(G) = 4$.

Teorema 2.2 Misalkan k adalah derajat maksimum di graf G maka $\chi_L(G) \leq 1 + k$.

Bukti:

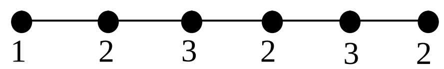
Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada G dan misalkan v adalah titik yang mempunyai derajat maksimum k. Maka v bertetangga dengan titik $x_1, x_2, \dots, x_k$ sehingga $d(x_1, v) = d(x_2, v) = \cdots = d(x_k, v) = 1$. Menurut Teorema 2.1, diperoleh $c(x_1) \neq c(x_2) \neq \cdots \neq c(x_k)$ sehingga $x_1, x_2, \dots, x_k$ mempunyai warna berbeda, dan karena v bertetangga dengan $x_1, x_2, \dots, x_k$ maka v mempunyai warna yang berbeda dari $x_1, x_2, \dots, x_k$ Jadi warna yang dibutuhkan adalah (1 + k) warna. Akibatnya, $\chi_L(G) \leq 1 + k$. ■

Berikut ini diberikan bilangan kromatik lokasi beberapa graf yang diambil dari Chartrand dkk. (2002) .

Teorema 2.3 bilangan kromatik lokasi graf lintasan P_n , n ≥ 3 adalah 3.

Bukti:

Diketahui bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Jelas bahwa untuk n ≥ 3 maka $\chi_L(P_n) \geq 3$. Berdasarkan Teorema 2.2 $\chi_L(G) \leq 1 + k$, dengan *k* adalah derajat titik maksimum. Karena $P_{n,k} = 2$, maka $\chi_L(P_n) \leq 1 + 2$. Akibatnya, $\chi_L(P_n) \leq 3$. Jadi terbukti $\chi_L(P_n) = 3$. ■

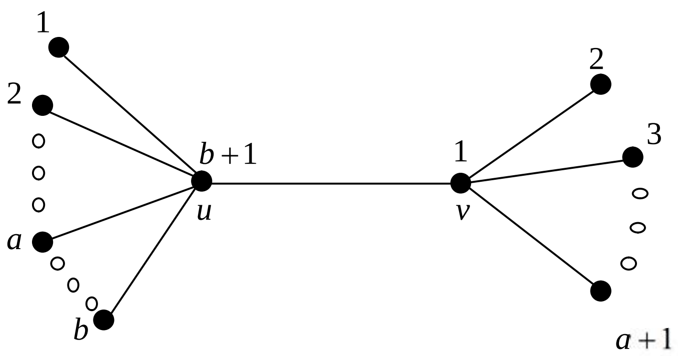


Gambar 5. Pewarnaan lokasi minimum pada P_n , $n \geq 3$

Teorema 2.4 Untuk bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$ $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$.

Bukti:

Berdasarkan Akibat 2.1 didapat batas bawah dari $S_{a,b}$ yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \geq b+1$. Selanjutnya, ditentukan batas atasnya yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \leq b+1$. Misalkan *c* merupakan pewarnaan titik dengan (b+1) warna seperti yang terlihat pada Gambar 6. Perhatikan bahwa kode warna dari setiap titik $S_{a,b}$ berbeda, sehingga *c* merupakan pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(S_{a,b}) = b+1$. ■

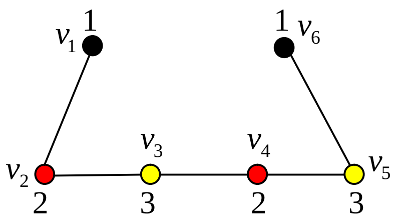


Gambar 6. Pewarnaan lokasi minimum dari $S_{a,b}$

Selanjutnya akan diberikan beberapa definisi tentang titik dominan dan *clear path* yang diambil dari Asmiati dkk. (2013).

Misalkan c merupakan pewarnaan lokasi graf G (V,E) dan diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ adalah partisi V(G) terhadap c. Suatu titik v ∈ G disebut titik dominan jika $d(v, S_i) = 0$ jika $v \in S_i$ dan 1 untuk yang lainnya. Suatu lintasan yang menghubungkan dua titik dominan di G disebut dengan *clear path* jika semua titik internalnya bukan titik dominan.

Berikut ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dan titik dominan yang terdapat pada suatu graf G:



Gambar 7. Pewarnaan lokasi minimum pada P_6

Pada Gambar 8. diperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf tersebut adalah 3 dengan kode warna dari tiap-tiap titik sebagai berikut:

$c_\Pi(v_1) = \{0,1,2\}$, $c_\Pi(v_2) = \{1,0,1\}$, $c_\Pi(v_3) = \{2,1,0\}$, $c_\Pi(v_4) = \{2,0,1\}$, $c_\Pi(v_5) = \{1,1,0\}$, $c_\Pi(v_6) = \{0,2,1\}$

Berdasarkan teorema sebelumnya, maka graf pada Gambar 8. yang menjadi titik dominan adalah v_2 dan v_5. Contoh *clear path* pada Gambar 8. adalah $v_2 - v_3 - v_4 - v_5$.

Lemma 2.1 Diberikan suatu graf G dengan $\chi_L(G)$= k. Terdapat paling banyak k titik dominan di G dan semuanya harus memiliki warna yang berbeda.

Bukti:

Misalkan $v \in G$ merupakan titik dominan dan G adalah graf terhubung maka $d(v, C_i) = 0$ untuk $v \in C_i$ dan $d(v, C_i) = 1$ untuk $v \notin C_i$. Karena $\chi_L(G) = k$, maka kelas partisi Π memuat *k* kelas warna, misalkan $C_1, C_{2,\ldots,}C_k$ dan setiap $x \in G$ memiliki kode warna yang berbeda. Akibatnya, G memuat paling banyak *k* titik dominan dan masing-masing memiliki kode warna yang berbeda. ■

Lemma 2.2 diberikan graf G dengan $\chi_L(G) = 3$. Maka panjang dari setiap *clear path* nya ganjil.

Bukti:

Diberikan 3 pewarnaan lokasi pada G. Diberikan P suatu *clear path* yang menghubungkan dua titik dominan x dan y pada G. Misalkan *c(x)* = 1 dan *c(y)* = 2 . jika semua titik internal P bukan dominan maka warna masing-masing titik haruslah 1 atau 2. Akibatnya, banyaknya titik internalnya harus genap. Jadi, panjang dari P adalah ganjil. ■

Lemma 2.3 Diberikan graf G yang memuat siklus dengan $\chi_L(G) = 3$ dan *c* adalah pewarnaan dengan menggunakan tiga titik. Pernyataan berikut adalah ekuivalen:

a. Jika G memuat siklus ganjil maka G tepat memiliki 3 titik dominan dan ketiganya berada di siklus ganjil.
b. Jika G memuat siklus genap maka G memiliki paling banyak 3 titik dominan dan dua diantaranya haruslah titik yang bertetangga dalam suatu siklus.

Bukti:

a. Diberikan C merupakan siklus genap, diberikan P merupakan *clear path* yang menghubungkan dua titik dominan x dan y, asumsikan panjang dari *clear path* tersebut genap, akibatnya akan ada dua titik yang memiliki kode warna yang sama sehingga graf tersebut tidak akan memiliki tiga titik dominan, kontradiksi.

b. Jika G memuat siklus genap, berdasarkan Lemma 2.1 dan 2.2 semua titik dari setiap siklus C di G harus menerima dua warna. Oleh karena itu, terdapat paling banyak dua titik dominan di C. Misalkan hanya terdapat satu titik dominan di C yaitu x , titik x harus mempunyai tetangga ketiga (diluar siklus C) yang menerima warna ketiga yang berbeda dari C. Akibatnya, dua titik lain yang bertetangga dengan x di C akan mempunyai warna yang sama, kontradiksi.

   Oleh karena itu, terdapat tepat dua titik dominan x dan y di C. Jika mereka tidak bertetangga maka dua tetangga dari x di C akan mempunyai kode warna yang sama, kontradiksi. Selain itu, tiap-tiap $\{x,y\}$ harus memiliki tetangga lain yang tidak berada di C untuk membuatnya dominan. ■