

II. DISTRIBUSI F DAN *THREE-PARAMETER GENERALIZED F (G3F)*

Distribusi probabilitas dari suatu peubah acak kontinu dapat dinyatakan dalam suatu rumus. Rumus tersebut adalah suatu fungsi nilai numerik dari peubah acak X dan disajikan dengan simbol $f(x)$. Dalam peubah acak kontinu, $f(x)$ biasanya disebut fungsi kepadatan (kerapatan) peluang, atau disingkat fkp X .

2.1. Distribusi F

Dalam teori probabilitas dan statistika, distribusi F merupakan distribusi probabilitas kontinu. Distribusi F juga dikenal dengan sebutan distribusi F-Snedecor atau distribusi Fisher-Snedecor. Nama tersebut diambil dari nama penemunya, yakni untuk menghargai Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962) dan George W. Snedecor (1881 – 1974) yang merupakan pakar statistika, pertanian eksperimental, dan genetika kuantitatif asal Inggris dan asal Amerika. Distribusi F seringkali digunakan dalam pengujian statistika, antara lain analisis varians dan analisis regresi.

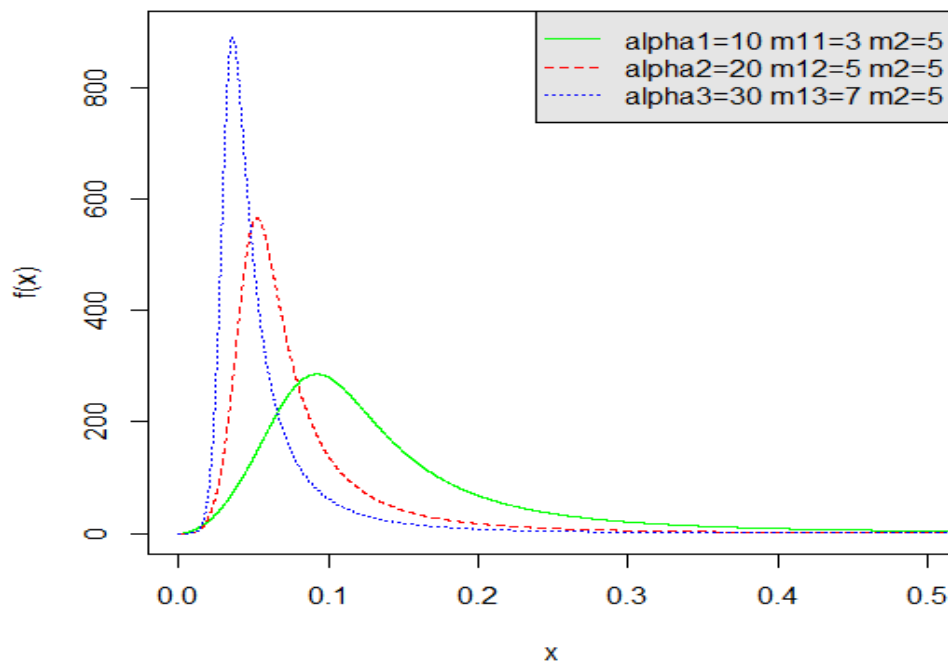
Walpole, Ronald, Sharon, dan Raymond (1998) menyatakan bahwa suatu peubah acak dikatakan berdistribusi F jika fkp nya ditentukan oleh

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\Gamma\frac{\alpha}{2}\Gamma\frac{\beta}{2}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{x^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left(1 + x\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} ; \quad 0 < x < \infty$$

Walpole *et al.* (1998) juga mendiskusikan ciri-ciri dari distribusi F, yaitu sebagai berikut.

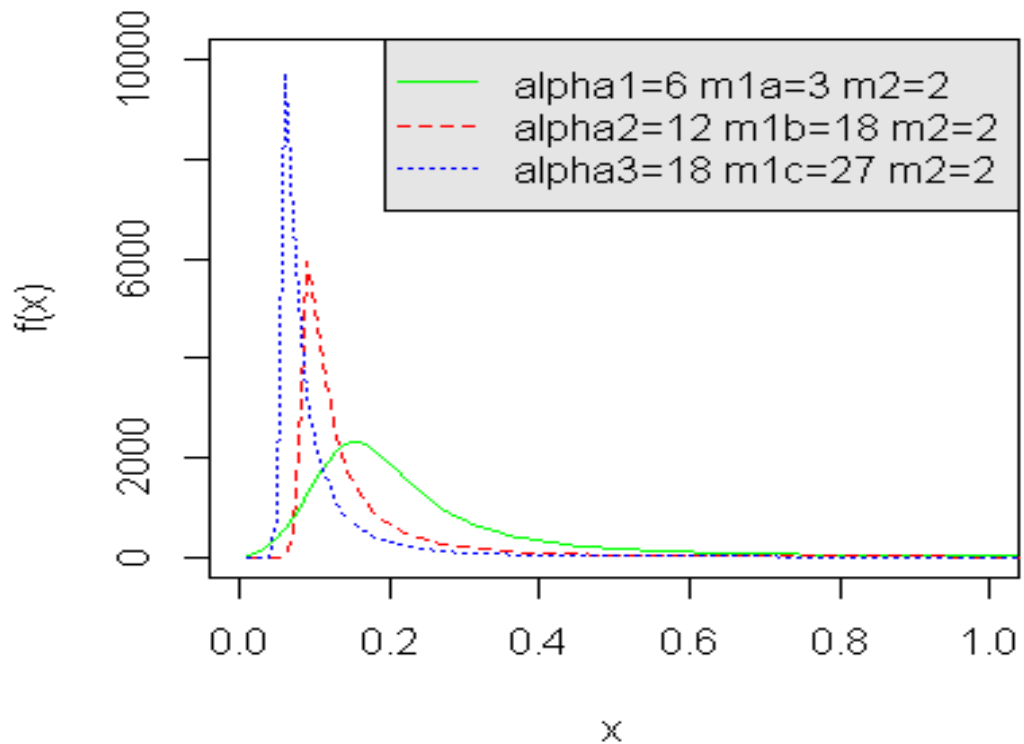
1. Distribusi F bersifat kontinu. Hal ini berarti bahwa distribusi F nilainya bisa jadi tidak terbatas, antara nol dan positif tak hingga,
2. Distribusi F tidak dapat bernilai negatif. Nilai terkecil dari F adalah nol,
3. Bentuknya tidak simetris. Semakin besar jumlah derajat kebebasan pada pembilang dan penyebut, distribusinya semakin mendekati distribusi normal,
4. Bersifat asimtotik (*asymptotic*). Semakin besar nilai x , kurva *generalized F* semakin mendekati sumbu X tetapi tidak akan pernah menyentuhnya.

Dengan menggunakan *software* bahasa R versi 3.1.2., grafik distribusi *G3F* berdasarkan fkp *G3F* dengan nilai parameter α dibuat meningkat, yaitu $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 20$, dan $\alpha_3 = 30$, nilai parameter m_1 dibuat meningkat, yaitu $m_{11} = 3$, $m_{12} = 5$, dan $m_{13} = 7$, serta nilai parameter m_2 dibuat tetap, yaitu $m_2 = 5$ digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1. Grafik fkp distribusi $G3F$ dengan nilai $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 20$, dan $\alpha_3 = 30$, $m_{11} = 3$, $m_{12} = 5$, dan $m_{13} = 7$, dan $m_2 = 5$

Gambar grafik distribusi $G3F$ berdasarkan fkp $G3F$ di atas senada dengan gambar grafik distribusi $G3F$ berdasarkan fkp $G3F$ yang dibuat oleh Susanti (2015) dengan membuat nilai parameter α juga dibuat meningkat, yaitu $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 12$, dan $\alpha_3 = 18$, nilai parameter m_i dibuat meningkat, yaitu $m_{1a} = 3$, $m_{1b} = 18$, dan $m_{1c} = 27$, serta nilai parameter m_2 dibuat tetap, yaitu $m_2 = 2$ dengan menggunakan *software* bahasa R versi 3.1.2., yang digambarkan sebagai berikut



Gambar 2. Grafik fkp distribusi $G3F$ dengan nilai $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 12$, dan $\alpha_3 = 18$, $m_{1a} = 3$, $m_{1b} = 18$, dan $m_{1c} = 27$, dan $m_2 = 2$

Dari kedua gambar grafik fkp distribusi $G3F$ dengan nilai α dan m_1 dibuat naik dan m_2 dibuat tetap di atas, dapat dilihat bahwa kedua grafik memiliki pola kurva yang sama. Meningkatnya nilai parameter α dan m_1 mengakibatkan adanya pengaruh terhadap bentuk ketiga grafik, yaitu semakin tinggi nilai α dan nilai m_1 maka grafik semakin meruncing dan titik ekstrim grafik semakin meningkat. Terlihat pula bahwa grafik semakin bergeser ke kiri seiring meningkatnya nilai α dan nilai m_1 . Hal tersebut menunjukkan adanya kombinasi pengaruh antara parameter α dan parameter m_1 . Parameter α pada distribusi $G3F$ merupakan parameter skala, yakni suatu parameter numerik yang menunjukkan besarnya distribusi atau keragaman data, semakin besar nilai α maka keragaman data yang dihasilkan justru semakin kecil sedangkan parameter m_1 merupakan parameter

bentuk, yakni suatu parameter numerik yang menunjukkan bentuk dari kurva atau ragam dari distribusi $G3F$.

2.2. Distribusi *Three-Parameter Generalized F (G3F)*

Pham-Ghia and Duong (1989) memperoleh fkp dari distribusi $G3F$ dengan melakukan perhitungan dari fkp distribusi F, distribusi *generalized gamma* ($G3G$) dan *generalized beta* ($G3B$). Selain itu, Malik (1967) juga memperoleh fkp distribusi $G3F$ dari proses pembagian dua fkp distribusi *generalized gamma* ($G3G$). Dari penjelasan tersebut, diketahui bahwa distribusi $G3F$ diperoleh dari penggabungan distribusi F dengan beberapa distribusi lain, diantaranya distribusi $G3G$ dan $G3B$. Oleh karena itu, distribusi *generalized F* disebut sebagai bentuk umum dari distribusi F.

Distribusi $G3F$ merupakan salah satu distribusi kontinu yang memiliki tiga parameter, yaitu α yang merupakan parameter skala, yakni suatu parameter numerik yang menunjukkan besarnya distribusi atau keragaman data, semakin besar nilai α maka keragaman data yang dihasilkan justru semakin kecil, serta m_1 dan m_2 yang merupakan parameter bentuk, yakni parameter numerik yang menunjukkan bentuk dari grafik $G3F$. $G3F$ adalah distribusi yang memiliki sifat yang sama seperti distribusi F namun lebih fleksibel karena di dalamnya termuat beberapa distribusi yang sering digunakan dalam kasus tertentu, diantaranya adalah distribusi $G3G$ dan distribusi $G3B$.

Cox (2008) telah mengaplikasikan $G3F$ dengan menggunakan *software* statistika standar untuk memperoleh keterangan kematian pasien terdiagnosa AIDS yang

telah melakukan terapi HIV dalam empat tahap berbeda. Sedangkan Pham-Ghia dan Duong (1989) menyatakan bahwa distribusi $G3F$ sering digunakan dalam aplikasi dan pemodelan statistika, terutama dalam masalah analisis regresi dan varians.

Menurut Pham-Ghia and Duong (1989), misalkan X adalah peubah acak dari distribusi $G3F(\alpha, m_1, m_2)$ maka fkp nya adalah

$$f(x) = \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1, m_2)} \frac{x^{m_1-1}}{[1 + \alpha x]^{m_1+m_2}}$$

dengan $B(m_1, m_2)$ adalah fungsi Beta.

Syarat yang harus dipenuhi oleh fkp adalah integral dari fkp tersebut bernilai 1.

Berikut bukti fkp distribusi $G3F$ di atas memenuhi syarat fkp.

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) &= \int_0^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1, m_2)} \frac{x^{m_1-1}}{[1 + \alpha x]^{m_1+m_2}} dx \\ &= \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1, m_2)} \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{x^{m_1-1}}{(1 + \alpha x)^{m_1+m_2}} dx \end{aligned}$$

Misalkan bahwa $y = \alpha x$ maka $x = \frac{1}{\alpha} y$, substitusikan pemisalan tersebut sehingga

diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1, m_2)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{m_1-1}}{(1+y)^{m_1+m_2}} \frac{1}{\alpha} dy \\ &= \frac{1}{B(m_1, m_2)} \int_0^\infty \frac{y^{m_1-1}}{(1+y)^{m_1+m_2}} dy\end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi fungsi Beta, maka diperoleh

$$= \frac{1}{B(m_1, m_2)} \cdot B(m_1, m_2)$$

$$\varphi_X(t) = 1$$