IV. FUNGSI KARAKTERISTIK

Fungsi karakteristik menunjukkan apakah sebuah anggota terdapat dalam sebuah himpunan atau tidak. Papoulis (1984) juga menyatakan bahwa untuk mendapatkan momen dari suatu distribusi peluang digunakan sebuah fungsi tertentu. Fungsi tertentu ini disebut fungsi pembangkit momen ($M_X(t)$), yang didefinisikan sebagai nilai harapan dari e^{tx}. Untuk peubah acak X kontinu, secara matematis, $M_X(t)$ dirumuskan oleh:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

Untuk distribusi – distribusi peluang tertentu, fungsi pembangkit momennya mungkin tidak ada untuk seluruh nilai riil dari *t*. Dalam permasalahan ini dapat digunakan fungsi karakteristik $\varphi(it)$, yang didefinisikan sebagai nilai harapan dari e^{itX}. Selanjutnya fungsi eksponensial e^{itX} ini didefinisikan sebagai ekspansi trigonometri yaitu.

$$e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$$

dengan t bernilai riil dan $i^2 = -1$

Fungsi karakteristik dari peubah acak X didefinisikan sebagai :

$$\varphi(it) = E\left(e^{itX}\right)$$

Dengan nilai ekspetasi fungsi kompleks $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$ maka fungsi karakteristik $(\varphi(it))$ dapat diberikan dalam bentuk integral berikut.

$$\varphi(it) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos tX + i \sin tX) f(x)dx$$

Secara umum, fungsi karakteristik memiliki beberapa sifat yang harus dipenuhi. Lukacs (1970) telah menuliskan beberapa teorema tentang sifat yang harus dipenuhi oleh setiap fungsi karakteristik, salah satu teorema tersebut adalah sebagai berikut.

Teorema

Misalkan *F*(*x*) adalah suatu distribusi dengan fungsi karakteristik $\varphi_X(it)$, maka

i. $\varphi_X(0) = 1$

ii. $|\varphi_X(it)| \le 1$

iii. $\varphi_X(-it) = \overline{\varphi_X(it)}$, dengan $\overline{\varphi_X(it)}$ adalah sekawan dari fungsi karakteristik $\varphi_X(it)$.

Bukti

i. Misalkan $\varphi_X(it) = E\left[e^{itX}\right]$ untuk t = 0, maka berlaku

$$\varphi_X(it) = E\left[e^{itX}\right]$$

$$= E\left[e^{0}\right]$$

$$= E[1]$$

$$= 1$$

ii. Misalkan X adalah sebarang peubah acak dengan fungsi peluang $f(x)$. Berdasarkan formula Euler dengan $e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)$ maka

$$\left|e^{itX}\right| = \sqrt{Cos^2(tX) + Sin^2(tX)},$$

$$\left|e^{itX}\right| = 1$$

Sehingga

$$|\varphi_X(it)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f(x)df\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itX} f(x)\right| df$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itX}\right| \left|f(x)\right| df$$

$$\leq 1$$

iii. Misalkan $\overline{\varphi_X(it)}$ adalah sekawan dari fungsi karakteristik $\varphi_X(it)$.

Perhatikan bahwa

$$\varphi_X(it) = E\left[e^{itX}\right]$$

$$= E\left[\cos(tX) + i\sin(tX)\right]$$

$$= E\left[\cos(tX)\right] + iE\left[\sin(tX)\right] \qquad (1)$$

Akan ditunjukan bahwa fungsi karakteristik dari $-X$ adalah $\overline{\varphi_X(it)}$, yaitu

$$E\left[e^{it(-X)}\right] = E\left[e^{-itX}\right]$$

$$= E\left[\cos(-tX) + i\sin(-tX)\right]$$

$$= E\left[\cos(tX) - i\sin(tX)\right]$$

$$= E\left[\cos(tX)\right] - iE\left[\sin(tX)\right]$$

$$= \overline{\varphi(it)} \qquad (2)$$

Berdasarkan (1) dan (2) terlihat bahwa fungsi karakteristik dari $-X$ adalah $\overline{\varphi_X(it)}$, sekawan $\varphi_X(it)$.