III. FUNGSI – FUNGSI KHUSUS

Dalam menentukan fungsi karakteristik distribusi *G3F*, penulis menggunakan beberapa fungsi, distribusi, dan teorema yang berkaitan dengan proses tersebut, yakni sebagai berikut.

3.1. Fungsi Beta

Menurut Nakhi (2001), fungsi beta untuk batas nol sampai tak hingga didefinisikan sebagai berikut.

$$B(u,v)=\int_0^\infty x^{u-1}\left(1+x\right)^{-v-u}\,dx$$

Sedangkan fungsi beta untuk batas nol sampai satu didefinisikan sebagai berikut.

$$B(u,v)=\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx$$

dengan $B(u,v)$ konvergen untuk $u,v>0$

Selain itu, Nakhi (2001) juga mengungkapkan bahwa sifat yang dimiliki fungsi beta adalah simetris, yaitu:

$B(u,v)=B(v,u)$

Bukti

$$B(u,v)=\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx$$

Dengan menggunakan transformasi $x = 1 - y$, maka diperoleh

$$B(u,v) = \int_0^1 (1-y)^{u-1} (y)^{v-1} dy$$

$$= \int_0^1 (y)^{v-1} (1-y)^{u-1} dy$$

$$B(u,v) = B(v,u)$$

Dalam penelitian ini, fungsi beta yang digunakan adalah fungsi beta dengan batas nol sampai tak hingga. Hal itu dikarenakan distribusi *G3F* yang menjadi distribusi utama dalam penelitian ini juga memiliki batas nilai antara nol sampai tak hingga.

3.2. Fungsi Gamma

Fungsi gamma, menurut Walpole *et al.* (1998), adalah fungsi yang didefinisikan sebagai integral dengan bentuk umum sebagai berikut.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(x) = \lim_{b \to \infty} \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt$$

Walpole *et al.* (1998) juga mengemukakan beberapa sifat yang dimiliki oleh fungsi gamma, yaitu sebagai berikut.

1. $\Gamma(x) = (x-1).\Gamma(x-1)$

   Bukti

   $$\Gamma(x) = \lim_{b \to \infty} \int_0^b t^{x-1} e^{-t} dt$$

Dengan menggunakan integral parsial, maka

$$\Gamma(x) = \lim_{b\to\infty}\left[-b^{x-1}e^{-b} - \int_0^b -(x-1)t^{x-2}e^{-t}\,dt\right]$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left(b^{x-1}e^{-b}\right) + (x-1)\left[\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}\,dt\right]$$

$$= 0 + (x-1)[\Gamma(x-1)]$$

$$\Gamma(x) = (x-1)[\Gamma(x-1)]$$

2. $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$

Sifat ini dapat dibuktikan dengan cara yang sama pada sifat pertama, yaitu:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b t^x e^{-t}\,dt\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-b^x e^{-b} - \int_0^b x.t^{x-1}(-e^{-t})\,dt\right]$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left[b^x e^{-b}\right] + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

$$= 0 + x.\Gamma(x) \to \Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$$

3. $\Gamma(1) = 1$

Bukti

$$\Gamma(1) = \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b t\;\; e^{-t}\,dt\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[b(-e^{-b}) - \int_0^b -e^{-t}\,dt\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-be^{-b}\right) + (-e^{-t})\Big|_0^\infty$$

$$= \lim_{b\to\infty} (-be^{-b}) + \left(-e^{\infty} - (-e^{0})\right)$$

$$= 0 + 1$$

$$\Gamma(1) = 1$$

3.3 Hubungan Distribusi Beta Dengan Distribusi Gamma

Pada penelitian ini, transformasi distribusi beta menjadi distribusi gamma digunakan untuk mentransformasi fungsi karakteristik distribusi *G3F* menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Mc Donald (1995) mengungkapkan bahwa untuk menghitung nilai fungsi beta, digunakan hasil dari fungsi gamma.

Dengan menggunakan koordinat polar, dilakukan perhitungan berikut.

Ambil : $x = \sin^2 \theta$

$$dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

batas – batas integral :

$$x = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$B(m,n) = \int_0^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2(m-1)} (1-\sin^2\theta)^{n-1} (2\sin\theta\cos\theta d\theta)$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2m-2} (\cos\theta)^{2n-2} (2\sin\theta\cos\theta d\theta)$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2m-1} (\cos\theta)^{2n-1} d\theta$$

Setelah perhitungan fungsi beta di atas, kemudian dilakukan perhitungan dengan menggunakan fungsi gamma, yakni sebagai berikut.

Dengan mengambil definisi fungsi gamma, diperoleh

$$\Gamma(m) = \int_{0}^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

ambil $x = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$, maka memenuhi

$$= \int_{0}^{\infty} u^{2m-2} e^{-u^2}\, 2udu$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} u^{2m-1} e^{-u^2} du$$

$$\Gamma(n) = \int_{0}^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

ambil $x = v^2 \Rightarrow dx = 2vdv$, maka memenuhi

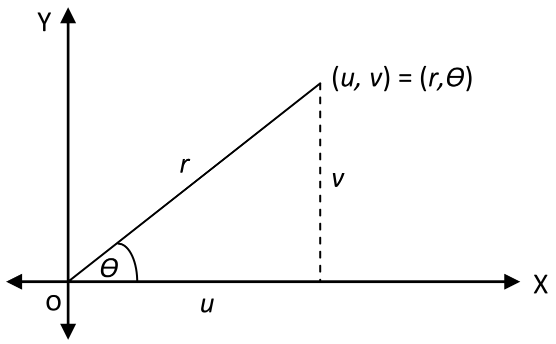
$$= \int_0^{\infty} v^{2n-2} e^{-v^2} v\,dv$$

$$= 2\int_0^{\infty} v^{2n-1} e^{-v^2}\,dv$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \left(2\int_0^{\infty} u^{2m-1} e^{-u^2}\,du\right)\left(2\int_0^{\infty} v^{2n-1} e^{-v^2}\,dv\right)$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{2m-1} v^{2n-1} e^{-\left(u^2+v^2\right)}\,du\,dv$$

Dengan menggunakan transformasi koordinat kutub, yakni sebagai berikut.



Sehingga diperoleh $u = r\cos\theta$ dan $v = r\sin\theta$, maka dengan menggunakan transformasi parameter diperoleh persamaan berikut.

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\left(r\cos\theta\right)^{2m-1}\left(r\sin\theta\right)^{2n-1} e^{-r^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{dr} & \frac{\partial v}{dr} \\ \frac{\partial u}{d\theta} & \frac{\partial v}{d\theta} \end{vmatrix} \text{dr d}\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\left(r\cos\theta\right)^{2m-1}\left(r\sin\theta\right)^{2n-1} e^{-r^2} \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r.\sin\theta & r.\cos\theta \end{vmatrix} \text{dr d}\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} (r\cos\theta)^{2m-1} (r\sin\theta)^{2n-1} e^{-r^2} \text{ r dr d}\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta \text{ dr d}\theta$$

$$= \left(2 \int_0^{\infty} \text{r}^{2(\text{m+n})-1}\, e^{-r^2} \text{dr}\right)\left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\text{m}-1}\theta \, \sin^{2\text{n}-1}\theta \, \text{d}\theta\right)$$

$$\Gamma(m).\Gamma(n) = \Gamma(m+n)B(m,n)$$

Jadi, diperoleh rumus umum untuk menghitung nilai fungsi beta menggunakan fungsi gamma, yaitu:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

3.4 Aproksimasi Stirling dari Fungsi Gamma

Menurut Spiegel (1968), pendekatan atau aproksimasi Stirling dibangun oleh James Stirling, dan rumus aproksimasi stirling dari fungsi gamma adalah

$$\Gamma(az+b) \approx \sqrt{2\pi}.e^{-az}(az)^{az-b-\frac{1}{2}}$$

3.5 Ekspansi Deret Taylor dan MacLaurin

Secara umum, ekspansi deret Taylor diberikan oleh

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Penurunan berturut-turut dari fungsi tersebut adalah

$$f^{'}(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots$$

$$f^{''}(x) = 2c_2 + 2.3c_3 x + \cdots + (n-1)nc_n x^{n-2} + \cdots$$

Dan seterusnya sampai ke-*n* untuk setiap *n* anggota bilangan bulat positif. Dalam kasus $x = 0$, deret Taylor orde-*n* dapat disederhanakan, yang disebut dengan deret Maclaurin orde-*n*.

Dengan demikian, persamaan di atas menjadi

$$f(0) = c_0$$

$$f^{'}(0) = c_1$$

$$f^{''}(0) = 2c_2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{f^{''}(0)}{2!}$$

Sehingga bentuk umumnya adalah

$f^n(x) = n!c_n$ atau $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$; untuk setiap bilangan bulat positif *n*

Jadi, deret pangkat dari fungsi f dalam *x* dapat ditulis sebagai berikut.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Jika $f(x) = e^x$, dan turunannya $f^n(x) = e^x$, sehingga pada $x = 0$, $f(0) = 1$, $f^n(0) = 1$, maka menurut rumus Maclaurin diperoleh

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!}$$

3.6 Rumus Euler

Leonard Euler (1707 –1783), pengarang matematika asal Swiss, memperkenalkan *e* sebagai bilangan dasar untuk logaritma natural, memperlihatkan bahwa *e* dan e^2 adalah tak rasional, dan $e^{i\pi} = -1$.

Rumus Euler adalah rumus matematika dalam analisis kompleks yang menunjukan hubungan antara fungsi trigonometri dan fungsi eksponensial.

Kreyszig (1993) menuliskan sebagai berikut.

Rumus euler menyatakan bahwa, untuk setiap bilangan riil *x*,

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

Dan fungsi sekawannya adalah

$$e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$$

dengan : e adalah basis logaritma natural

i adalah unit imajiner