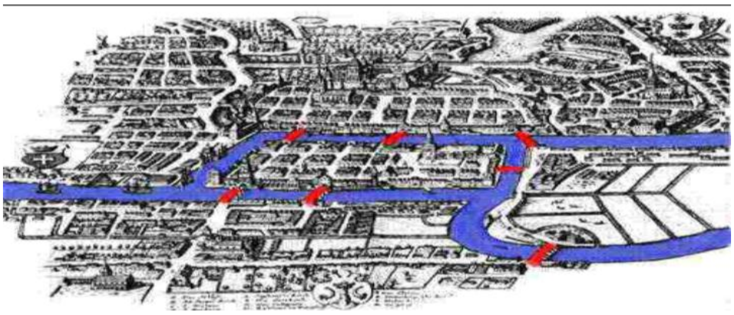
I.PENDAHULUAN

1.1.Latar Belakang

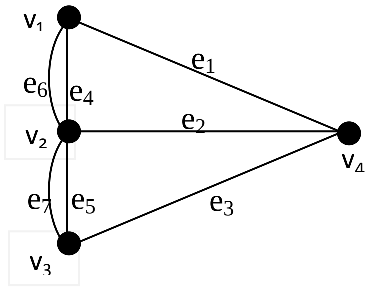
Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang mampu mempresentasikan beberapa masalah atau kondisi yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, struktur organisasi dapat dipresentasikan ke dalam bentuk graf dengan v adalah adalah titik dan e adalah garis dimana $\{v_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$ menyatakan jabatan dalam organisasi dan $\{e_1, e_2, e, \dots e_n\}$ menunjukkan garis yang menghubungkan antara jabatan satu ke jabatan yang lainnya.

Teori Graf muncul sewaktu Leonard Euler menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg pada tahun 1736. Jembatan Konigsberg melintasi sungai yang berada di Prusia. Permasalahan yang dihadapi adalah mungkinkah seseorang berjalan mengelilingi kota tersebut yang dimulai dan diakhiri pada tempat yang sama, dengan melintasi tujuh jembatan masing-masing tepat satu kali.



Gambar 1.1. Jembatan Konigsberg

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Euler mempresentasikannya dalam graf dengan titik dalam graf menyatakan daerah-daerah, dan garis-garisnya menyatakan jembatan dan dari sinilah mulai konsep dari graf. Graf yang mempresentasikan masalah jembatan Konigsberg dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 1.2. Graf yang mempresentasikan jembatan Konigsberg

Dengan mempresentasikan titik sebagai daratan dan garis sebagai jembatan, Euler menyatakan bahwa tidak mungkin melewati setiap jembatan tersebut tepat satu kali. Hal ini dapat terjadi jika banyaknya jembatan yang menghubungkan tiap-tiap daratan berjumlah genap.

Jika diberikan n titik dan m garis, dengan $n \neq 0$ dan $m \geq n - 1$, banyaknya graf yang dapat dibentuk, diantaranya adalah graf terhubung. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan didiskusikan tentang banyaknya graf terhubung yang terbentuk jika diberikan n titik dan m garis dan boleh memiliki *loop* tetapi tidak boleh memuat garis paralel.

Suatu graf $G(V, E)$ dikatakan terhubung jika terdapat *path* antara sebarang dua titik di G. Graf terhubung dapat memuat *loop* dan dapat pula tidak memuat *loop*. *Loop* adalah suatu garis dalam suatu graf yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama.

Pelabelan pada graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum dipresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bilangan asli yang disebut label. Graf berlabel adalah graf yang titik atau garisnya memiliki label. Jika titiknya diberi label, maka pelabelan disebut dengan pelabelan titik, jika garis yang diberikan label maka pelabelannya disebut pelabelan garis. Jika titik dan garis keduanya diberikan label maka pelabelannya disebut dengan pelabelan titik dan garis atau pelabelan total.

Selanjutnya dari penelitian Handayani (2014) diperoleh rumus untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel tanpa loop. Diberikan n titik dan m garis dan x adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik (sisi rangkap dihitung satu), y adalah banyaknya partisi dari E selain partisi dengan kardinalitas terkecil, z adalah banyaknya graf tidak terhubung berlabel serta k adalah banyaknya partisi dari E selain partisi dengan kardinalitas terkecil yang sama. Untuk $n = 3{,}4$ dan banyaknya garis $2 \leq m \leq 10$ banyaknya graf terhubung tanpa *loop* adalah ${}_{y}^{x}P\left(\binom{\binom{n}{2}}{m} - z\right)$ dan banyaknya graf terhubung tanpa *loop* untuk graf dengan kardinalitas yang sama adalah $\frac{{}_{y}^{x}P}{k!}(g_n(m) - z) = \frac{{}_{y}^{x}P}{{}_{k}^{k}P}\left(\binom{\binom{n}{2}}{m} - z\right)$.

Pada penelitian selanjutnya, Setyawinarni (2015) mendapatkan rumus untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 3$; $m \geq 1$ adalah $\binom{(2m+2)}{2}$ dan $n = 4\,; m \geq 1$ adalah $\binom{3m+1}{3}$-$\binom{m+1}{3}$+$\binom{2m+2}{2}$.

Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk meneliti banyaknya graf terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 3{,}4$.

1.2.Batasan Masalah

Dalam penelitian ini pembahasan dibatasi pada graf terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 3{,}4$ dan $m \geq (n - 1)$ dengan n adalah banyaknya titik dan m adalah banyaknya garis pada suatu graf.

1.3. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dilakukannya penelitian ini adalah:

1. Menentukan banyaknya graf terhubung tanpa garis paralel yang terbentuk jika diberikan n titik dan m garis, dengan $n = 3, 4$ dan $m \geq (n - 1)$.
2. Menentukan pola yang terbentuk dari graf terhubung tanpa garis paralel yang telah terbentuk.
3. Menentukan rumus dari banyaknya graf terhubung tanpa garis paralel yang telah terbentuk.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah :

1. Memperluas pengetahuan teori graf khususnya graf terhubung.
2. Sebagai rujukan atau sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika dibidang teori graf.