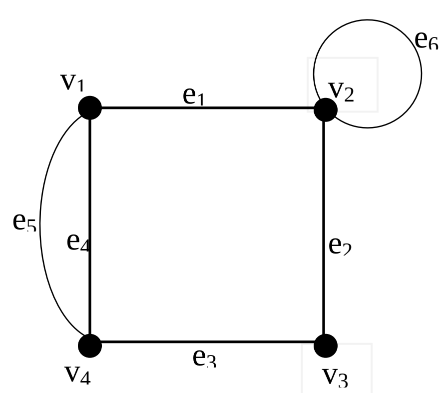
II.TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan tentang definisi serta konsep-konsep yang mendukung dalam penelitian ini.

2.1. Konsep Dasar Teori Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_{2,} v_3, \dots, v_n\}$ menyatakan himpunan titik yang tak kosong, dan $E(G) = \{e_1, e_{2,} e_3, \dots, e_m\}$ menyatakan himpunan garis (mungkin kosong) yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$ (Deo, 1989).

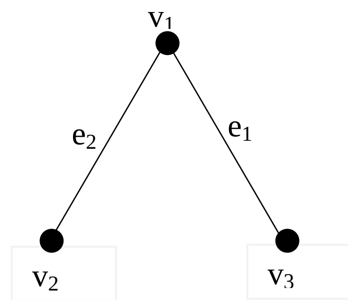
Contoh:



Gambar 2.1. Contoh graf

Dua titik u, v dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika satu sama lain dari kedua titik tersebut dihubungkan oleh garis yang sama dan dinotasikan dengan (u, v). Suatu garis dikatakan menempel atau *incident* dengan titik u jika titik u merupakan salah satu ujung dari garis tersebut (Deo, 1989).

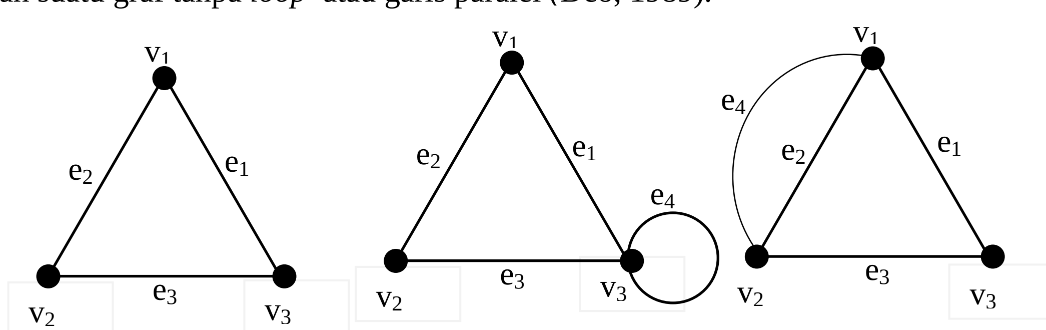
Contoh:



Gambar 2.2. Contoh graf dengan tiga titik dan dua garis

Pada Gambar 4, titik v_2 bertetangga dengan titik $v_1$dan titik v_1 bertetangga dengan titik v_3. Tetapi titik v_2 tidak bertetangga dengan titik v_3 karena tidak ada garis yang menghubungkan kedua titik tersebut. Garis e_1 menempel pada titik $v_1$dan v_3, sedangkan garis e_2 menempel pada titik v_1 dan v_2.

Loop adalah garis yang titik awal dan ujungnya sama, sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang memiliki titik ujung yang sama. Pengertian graf sederhana adalah suatu graf tanpa *loop* atau garis paralel (Deo, 1989).

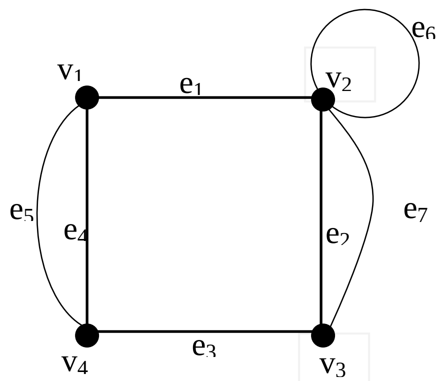


Gambar 2.3. Contoh graf sederhana, dan graf tidak sederhana

Walk adalah barisan berhingga dari titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap garis menempel pada titik sebelum dan sesudahnya.

Walk yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *closed walk.* Sedangkan, *path* adalah *walk* yang memiliki atau melewati titik yang berbeda-beda. *Path* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle* (Deo, 1989).

Contoh:

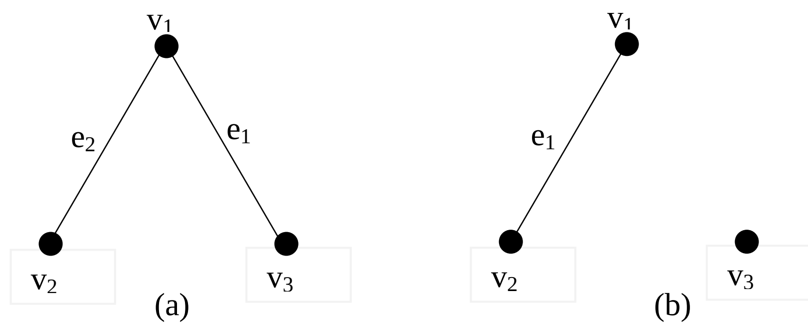


Gambar 2.4. Contoh graf dengan empat titik dan tujuh garis

Contoh *walk* dari Gambar 6 adalah $(v_1e_1, v_2e_6, v_2e_7, v_3e_3, v_4)$. Contoh *closed walk* adalah $(v_1e_1, v_2e_6, v_2e_7, v_3e_3, v_4e_4\ , v_1)$. Contoh *path* $(v_1e_5, v_4e_3, v_3e_2, v_2e_6)$, sedangkan *cycle* contohnya adalah $(v_1e_5, v_4e_3, v_3e_2, v_2e_{1,}v_1)$.

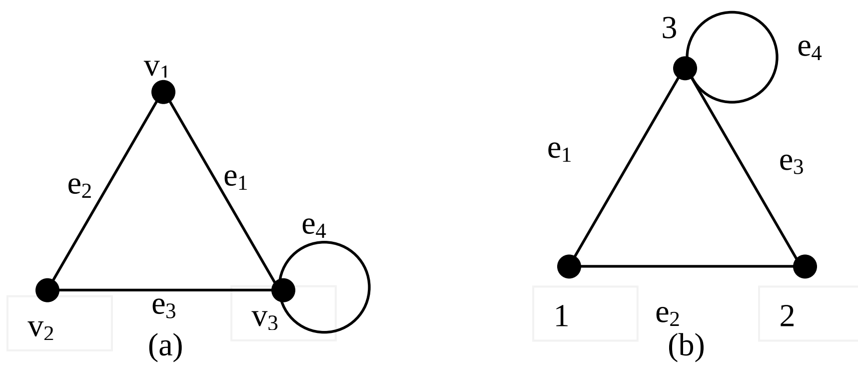
Suatu graf dikatakan graf terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada graf tersebut terdapat path yang menghubungkannya. Jika tidak ada *path* yang menghubungkan maka G dikatakan graf tak terhubung (Deo,1989).

Contoh:



Gambar 2.5. Contoh graf terhubung (a), dan contoh graf tidak terhubung (b)

Dua graf dikatakan graf yang isomorfis jika memiliki banyaknya titik dan garis yang sama dan mempertahankan sifat ketetanggaannya walaupun digambarkan dengan cara yang berbeda (Deo,1989).



Gambar 2.6. Contoh graf yang isomorfis

2.2.Teknik Dasar Pencacahan

Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Besaran $n!$ (dibaca "n faktorial") didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat antara n hingga 1 .

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1$ (Ayres dan Schmidt, 2004).

Secara umum permutasi r adalah objek dari n. Objek dapat dihitung dengan persamaan:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(Siang,2006)

Contoh:

Misalkan dalam kelas terdapat 20 mahasiswa. Akan dipilih dua orang yang menjadi ketua dan wakil angkatan. Ada berapa cara untuk memilih ketua dan wakil angkatan?

Penyelesaian:

Untuk memilih ketua angkatan ada 20 calon. Jadi ada 20 cara. Untuk memilih wakil angkatan, ada 19 calon sisanya sehingga untuk memilih ketua dan wakil ketua angkatan ada 20.19 = 380 cara.

$$P(20,2) = \frac{20!}{(20-18)!} = \frac{20.19.18!}{18!} = 380 \text{ cara}$$

Misalkan himpunan S memiliki $|S| = n$ elemen. Banyaknya himpunan bagian S yang terdiri dari r dengan $r \leq n$ disebut dengan kombinasi n objek yang diambil sebanyak r objek sekaligus. Simbolnya adalah C_r^n, $C_{n,r}$ atau $\binom{n}{r}$. Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan:

$$C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Dalam himpunan bagian yang dipilih urutan anggotanya tidaklah diperhatikan. Hal yang diperhatikan adalah objek-objek yang muncul (Siang,2006).

Contoh:

Seorang pelatih bola basket akan memilih komposisi pemain yang akan diturunkan dalam suatu pertandingan. Ada 12 orang pemain yang dapat dipilih. Berapa macam cara untuk membentuk tim ?

Penyelesaian:

Dalam memilih pemain yang akan diturunkan, urutan pemilihan tidaklah diperhatikan. Jadi, yang menjadi masalah adalah siapa yang akan dipilih. Tidaklah menjadi masalah apakah seorang pemain (katakan A) terpilih pertama ataupun terakhir. Jadi banyaknya tim yang dapat dibentuk oleh pelatih tersebut adalah kombinasi 12 objek yang diambil 5 sekaligus.

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12.11.109.8}{1.2.3.4.5} = 792 \text{ cara}$$

2.3. Barisan Aritmatika Orde Tinggi

Diberikan barisan bilangan $\{a_n\}$ sebagai berikut ini :

$$\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{r} \quad (1)$$

Beda pertama dari barisan (1) adalah:

$$\mathrm{D}_0^1, \mathrm{D}_1^1, \mathrm{D}_2^1, \dots, \mathrm{D}_\mathrm{r}^1$$

dengan

$$\mathrm{D}_\mathrm{r}^1 = \mathrm{a}_{\mathrm{r}+1} - \mathrm{a}_\mathrm{r}$$

Secara rekurensi definisikan beda orde ke k dari barisan (1) dengan orde k-1 sebagai beda sebelumnya adalah :

$$\mathrm{D}_0^\mathrm{k}, \mathrm{D}_1^\mathrm{k}, \mathrm{D}_2^\mathrm{k}, \dots, \mathrm{D}_\mathrm{r}^\mathrm{k}$$

dengan

$D_r^k = D_{r+1}^{k-1} - D_r^{k-1}$ (2)

Perhatikan bahwa (2) valid untuk $k = 1$ jika $a_r = D_r^0$

(Alonso,2000).

Proposisi 1 : Diberikan barisan (1). Jika terdapat polinomial $p(x)$ berderajat k dengan koefisien c sehingga $a_r = p(r)$ untuk $r = 0,1,2,3,....$ maka barisan (1) adalah barisan aritmatika orde k dengan beda adalah k! c (Alonso,2000).

Bukti :

Misalkan $p(x) = a_1x^k + a_2x^{k-1} + a_3x^{k-2} + \cdots$

Maka $a_r = a_1r^k + a_2r^{k-1} + a_3r^{k-2} + \cdots$

Sehingga

$$a_r = a_{r+1} - a_r = a_1[(r+1)^k - m^k] + a_2[(r+1)^{k-1} - r^{k-1}] + \cdots$$

$$= ckr^{k-1} \qquad \square$$

Oleh karena itu untuk beda pertama dapat dibentuk $p(x) = kcx^{k-1} + \cdots$ yang berderajat $k - 1$ dengan koefisien pertama kc sehingga $D_r^1 = p_1(r)$

Dengan melakukan perulangan proses yang sama sebanyak k kali dapat disimpulkan bahwa :

$D_r^k = p_k(r)$ untuk suatu polinomial $p_k(r)$ berderajat nol dengan koefisien pertama $k!\,c$ sehingga $D_r^k = k!\,c$ untuk $r = 0,1,2,...$

Berdasarkan Proposisi 1 dari barisan (1) terdapat polinomial $p(x)$ dengan derajat k, $p(x) = a_1x^k + a_2x^{k-1} + a_3x^{k-2} + \cdots$ dengan $a_r = p(r)$ untuk $r = 0,1,2,3,...$ maka barisan (1) yaitu $a_r = a_1 r^k + a_2 r^{k-1} + a_3 r^{k-2} + \cdots$ adalah barisan aritmatika orde k dengan beda pada orde k adalah sama. $\square$