I. PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG MASALAH

Eugene C. Catalan adalah seorang matematikawan asal Belgia yang menemukan bilangan Catalan pada tahun 1838 ketika mempelajari bentuk barisan *parentheses* (barisan bentuk kurung). Barisan *parentheses* dibuat dari semua string seimbang yang dibentuk dari n tanda kurung sebelah kiri dan n tanda kurung sebelah kanan dengan jumlah dari tanda kurung sebelah kanan tidak boleh melebihi tanda kurung sebelah kiri. Catalan menghitung banyaknya cara suatu rantai dari n + 1 simbol yang bisa dibentuk dengan n pasang tanda kurung sehingga setiap pasangan memiliki 2 simbol, sebuah ekspresi kurung dan sebuah simbol atau dua ekspresi kurung. Sebagai contoh, untuk n = 3, dapat dibentuk string seperti ()()() dan (())(), namun tidak diizinkan membentuk string seperti (())) atau ())(() (Grimaldi, 2012). Akan tetapi, bilangan tersebut tidaklah ditemukan pertama kali oleh Catalan.

Sekitar tahun 1751 Euler menemukan bilangan Catalan ketika mempelajari trigonometri dari poligon konveks (Koshy, 2009). Euler menentukan jumlah total dari cara seseorang bisa menggambarkan n – 3 diagonal dalam suatu poligon konveks n – sisi (untuk n ≥ 3) sehingga tidak ada dua diagonal beririsan didalam poligon dan bagian dalam poligon adalah triangulasi pada n – 2 segitiga.

Bilangan Catalan ini dapat diaplikasikan dalam berbagai macam hal. Berbagai contoh aplikasi bilangan Catalan ini telah dipublikasikan oleh Jiang (2012), antara lain sebagai berikut :

1. *Stacking coins* yaitu jumlah cara mengambil koin pada baris bagian bawah yang terdiri dari n berurutan dalam sebuah bidang sedemikian sehingga tidak ada koin yang diijinkan untuk diletakkan pada dua sisi dari koin bagian terbawah dan setiap koin tambahan harus berada di atas dua koin.
2. *Balanced parantheses* yaitu jumlah cara mengelompokkan suatu string dari n pasangan dari tanda kurung sedemikian sehingga setiap kurung buka berpasangan dengan kurung tutup
3. *Mountain ranges* yaitu jumlah cara membentuk daerah gunung pada suatu garis dengan n *upstrokes* dan n *downstrokes* sedemikian sehingga setiap *upstroke* bersesuaian dengan *downstroke* dengan lintasan tidak berada di bawah titik awal.
4. *Polygon triangulation* yaitu jumlah cara memotong n+2 polygon sisi konveks dalam sebuah bidang menjadi segitiga dengan menghubungkan titik – titik dengan garis lurus dan tidak ada garis yang berpotongan.
5. *Balanced trees* yaitu jumlah dari pohon biner lengkap dengan n titik dalam. Titik dalam adalah sebuah titik yang menghubungkan titik lain yang berada diatasnya. Pohon biner lengkap adalah suatu akar pohon yang setiap titik dalamnya memiliki tepat dua segmen untuk tumbuh.

Salah satu aplikasi lain dari bilangan Catalan adalah ketika menghitung banyaknya cara yang dapat dilakukan oleh seseorang dalam memilih rute perjalanan dari titik awal (0,0) sampai titik *Lattice* (n,n) dengan cara melangkah setiap satu satuan ke arah kanan atau ke arah atas. Hal ini dikenal sebagai *Lattice path.* Akan tetapi ketika cara melangkah *Lattice path* berubah menjadi diagonal maka lintasan yang dihasilkan disebut sebagai *Dyck path*.

Sebelumnya sudah banyak peneliti melakukan penelitian mengenai *Dyck path*, akan tetapi di Indonesia, sangat jarang sekali peneliti yang meneliti tentang hal ini. Beberapa penelitian yang telah dilakukan mengenai *Dyck path* adalah sebagai berikut :

1. Heubach and Toufik pada tahun 2006 dalam jurnalnya yang *berjudul Staircase Tilings and Lattice Paths* menjelaskan mengenai bagaimana menentukan suatu struktur kombinatorial, yaitu suatu pengubinan dari tangga dalam bidang $\Re^2$ ketika dibatasi dengan cara yang berbeda untuk menciptakan bijeksi langsung untuk *Dyck path* dengan panjang 2n, *Motzkin Path* dengan panjang n dan n – 1 serta *Schröder Paths* dan *Little Schröder Paths* dengan panjang n.
2. Dalam jurnal *Counting Humps in Motzkin Paths,* Ding and Du pada tahun 2011, membahas mengenai jumlah bukit dari *Dyck, Motzkin* dan *Schröder paths.* Sebelumnya, Regev (2010) menyadari bahwa jumlah gunung dari semua *Dyck path* panjang n adalah satu setengah dari jumlah *Super Dyck path* panjang n. *Super Dyck path* adalah suatu *Dyck path* yang diizinkan berada di bawah x – axis. Kemudian dihitung jumlah bukit dari *Motzkin Path* dan ditemukan relasi yang sama. Dalam jurnal ini, Ding and Du memberikan suatu bijeksi dan membuktikannya. Selain itu diberikan pula pembuktian baru

bahwa jumlah *Dyck path* dengan panjang n dengan k bukit adalah bilangan Narayana. Bilangan Narayana $N(n, k), n = 1, 2, 3 ..., 1 \leq k \leq n$ sesuai nama penemunya seorang matematikawan dari India T.V. Narayana (1930 – 1987) didefinisikan dalam bentuk $N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ (Grimaldi, 2012).

Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai banyaknya cara mengkonstruksi *Dyck path* dengan panjang *k – upstrokes* dan *k – downstrokes* dari titik (0,0) sampai (2k,0) dengan syarat *path* tidak boleh menyentuh sumbu – x kecuali pada titik titik ujungnya dan perubahan bentuk dari *Dyck path* menjadi *2 – colored Motzkin path* dan menjadi *Schröder path*.

1.2 Batasan Penelitian

Dalam penelitian ini hanya akan didiskusikan tentang diagram Lattice dan konstruksi *Dyck path* dengan panjang *k – upstrokes* dan *k – downstrokes* dari titik (0,0) sampai dengan (2k,0) yang dilakukan dibatasi dengan syarat *path* tidak boleh menyentuh sumbu – x kecuali pada titik – titik ujung serta perubahan bentuk menjadi *2 – colored Motzkin path* dan menjadi *Schröder path* tanpa *peak.* Hasil konstruksi yang digambarkan dalam penelitian ini hanya sampai k = 5

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengkonstruksi diagram Lattice dari titik (0,0) sampai (k,k) dan *Dyck path* dengan panjang *k – upstrokes* dan *k – downstrokes* dari titik (0,0) sampai

(2k,0) dengan syarat *path* tidak boleh menyentuh sumbu – x kecuali pada titik titik ujungnya.

2. Menentukan pola barisan dari *Dyck path* yang telah dikonstruksi.
3. Mengubah konstruksi dari *Dyck path* yang telah dibentuk menjadi *2-colored Motzkin path.*
4. Mengubah konstruksi dari *Dyck path* yang telah dibentuk menjadi *Schröder path.*
5. Membuktikan bahwa *Dyck path* yang terbentuk adalah bilangan Catalan

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk memperdalam pengetahuan tentang salah satu aplikasi bilangan Catalan yaitu diagram Lattice serta *Dyck path* dan bagaimana cara mengkonstruksinya serta mengubahnya dalam beberapa bentuk.