II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar, istilah – istilah dan definisi yang erat kaitannya dengan masalah yang harus dibahas yaitu mengenai banyaknya cara mengkonstruksi *Dyck path* dengan panjang *k – upstrokes* dan *k – downstrokes* dari titik (0,0) ke (2k,0) dengan syarat *path* tidak boleh menyentuh sumbu - x kecuali pada titik titik ujungnya.

2.1 Koefisien Binominal

Misalkan n dan r adalah bilangan buat non negatif. Koefisien binomial $\binom{n}{r}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Dengan $0 \leq r \leq n$. Jika $r > n$, maka $\binom{n}{r}$ didefinisikan sebagai 0 (Koshy, 2009).

Teorema 2.1.1 (Koshy, 2009)

Misalkan n dan r adalah bilangan bulat non negatif, maka

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Bukti :

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad \blacksquare$$

2.2 Segitiga Pascal (Koshy, 2009)

Koefisien binomial $\binom{n}{r}$ dengan $0 \leq r \leq n$ dapat disusun dalam bentuk segitiga. Setelah Pascal pada tahun 1663 menulis buku yang berjudul *Treatise on Arithmetic Triangle* kemudian buku tersebut dipublikasikan pada tahun 1665, maka segitiga yang dibentuk dari koefisien binomial $\binom{n}{r}$ disebut segitiga Pascal. Segitiga Pascal dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \rightarrow \text{baris 1} \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Gambar 2.1. Segitiga Pascal

2.3 Bilangan Catalan (Koshy, 2009)

Bilangan Catalan C_n secara umum didefinisikan sebagai berikut :

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$
$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, n \geq 0$$

Beberapa bilangan Catalan adalah sebagai berikut :

Tabel 2.1. Tabel bilangan Catalan

n	**C_n**
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1430
9	4862

2.3.1 Relasi Rekurensi (Anderson, 2002)

Ketika mempelajari barisan dari bilangan a_n, akan didapatkan suatu hubungan antara a_n dan a_{n-1} atau antara beberapa nilai sebelum a_i, $i < n$. Hubungan inilah yang disebut dengan relasi rekurensi.

Contoh 1 : (Menara Hanoi) (Anderson, 2002)

Masalah ini terkenal pada abad ke 19 oleh seorang matematikawan Perancis yang bernama E. Lucas. Terdapat n piringan, semua berukuran berbeda yang memiliki lubang ditengahnya dan tiga wadah vertikal sehingga piringan bisa disusun. Kondisi awalnya adalah semua piringan berada dalam satu tempat secara berurutan dengan urutan bagian bawah adalah piringan yang paling besar dan bagian atas adalah piringan terkecil sehingga membentuk sebuah menara. Piringan akan dipindahkan satu persatu, sehingga n piringan dapat tersusun dalam wadah yang lain, dengan syarat tidak ada langkah dimana sembarang piringan terletak di atas dibagian paling atas dari piringan yang terkecil. Berapakah jumlah minimum langkah untuk memindahkan piringan tersebut ?

Misalkan a_n dinotasikan sebagai jumlah langkah minimum untuk memindahkan n piringan. Jelas bahwa $a_1 = 1$ dan $a_2 = 3$. Pindahkan dari bagian atas ke wadah kedua, dan pindahkan bagian berikutnya ke wadah ketiga. Kemudian pindahkan lagi piringan terkecil di atas piringan yang lebih besar. Bagaimanakah dengan a_n ?. Jelas bahwa untuk memindahkan piringan bagian bawah, harus ada wadah yang kosong untuk memindahkannya sehingga untuk n -1 piringan yang lain harus dipindahkan ke wadah ketiga. Untuk memperoleh langkah ini, a_{n-1} harus dipindahkan. Piringan terbesar harus dipindahkan dalam wadah yang kosong kemudian piringan a_{n-1} yang lain dipindahkan sehingga piringan n – 1 yang lain berada di atasnya. Sehingga,

$a_n = 2a_{n-1} + 1.$

Dengan relasi rekurensi ini, dan kondisi awal adalah $a_1 = 1$, maka dapat ditentukan a_n.

$a_1 = 1$

$a_2 = 2.1 + 1 = 3$

$a_3 = 2.3 + 1 = 7$

$a_4 = 2.7 + 1 = 15$

... ...

$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2\,(1 + 2a_{n-2}) + 1 = 1 + 2 + 2^2 a_{n-2}$

$= 1 + 2 + 2^2\,(1 + 2a_{n-3}) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 a_{n-2}$

$= 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1} a_1$

$= 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}$

$= 2^n - 1$

2.3.2 Definisi Rekursif Dari Bilangan Catalan C_n (Davis, 2014)

Bilangan Catalan C_n didefinisikan sebagai berikut :

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, n \geq 0$$

Diasumsikan telah dihitung bilangan Catalan C_n untuk n = 0,1,2,...,n-1. Akan dihitung untuk nilai n.

Telah dihitung secara langsung bilangan Catalan C_n untuk n = 0,1,2,3,4 sehingga diperoleh $C_o = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$

Sehingga, dapat diperoleh bentuk relasi rekurensi sebagai berikut :

Kondisi Awal : $C_0 = 1$

$C_1 = C_0C_0$

$C_2 = C_1C_0 + C_0C_1$

$C_3 = C_2C_0 + C_1C_1 + C_0C_2$

$C_4 = C_3C_0 + C_2C_1 + C_1C_2 + C_0C_3$

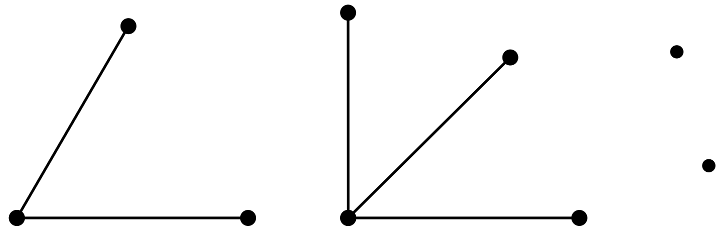
... ...

$C_n = C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + ... + C_1C_{n-2} + C_0C_{n-1}$

2.4 Konsep Dasar Teori Graf

Graf G adalah suatu struktur (V,E) dengan V(G) himpunan tak kosong yang elemen – elemennya disebut titik / *vertex* , sedangkan E(G) (mungkin kosong) adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen – elemen di V(G) yang anggotanya disebut sisi / *edge.* (Deo, 1989)

Contoh 2 :

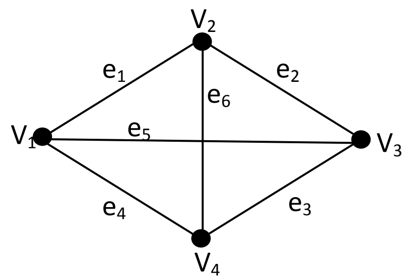


Gambar 2.2. Contoh graf G dengan 9 *vertex* dan 5 *edge*

Walk

Deo pada tahun 1989 menyatakan bahwa *walk* adalah barisan berhingga dari titik dan garis, dimulai dan diakhiri dengan titik sehingga setiap garis menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Tidak ada sisi yang muncul lebih dari sekali dalam satu *walk.*

Contoh 3:



Gambar 2.3. Contoh graf yang memuat *walk*

Contoh *walk* : v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_1,e_4,v_4

***Path* / Lintasan**

Path / lintasan adalah suatu walk yang tidak memiliki pengulangan *vertex*. (Hsu and Lin, 2009)

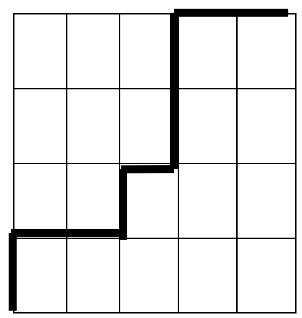
Berdasarkan Gambar 2, contoh *path* adalah v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4

2.5 Lattice Path, Dyck Path, 2 – colored Motzkin path dan *Schröder Path*

Lattice

Lattice $\Lambda = (V, E)$ adalah suatu model matematika dalam ruang diskrit yang terdiri dari dua himpunan, suatu himpunan *vertex* $V \subset \Re^n$ dan suatu himpunan *edge* $E \subset \Re^n \times \Re^n$ dengan tidak lebih dari dua sisi diantara dua titik. (Wallner, 2015)

Contoh 4 :



Gambar 2.4. Contoh *Lattice*

Definisi *Lattice Path / Lattice Walk*

Misalkan $\Lambda = (V, E)$. n – step *Lattice path* / *Lattice* walk atau walk dari $s \in V$ menuju $x \in V$ adalah suatu barisan $\omega = (\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n)$ dari elemen dalam V, sedemikian sehingga :

1. $\omega_0 = s,\ \omega_n = x$
2. $(\omega_i, \omega_{i+1}) \in E$

Panjang $|\omega|$ dari suatu *Lattice path* adalah jumlah n langkah (*edge*) pada barisan $\omega = (\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n)$ (Wallner, 2015)

Dyck path

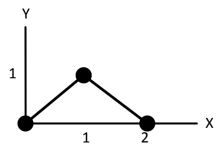
Dyck path adalah suatu *path* dalam kuadran pertama yang dimulai dari titik asal dan berakhir pada (2n, 0) dan terdiri dari langkah (1,1) (disebut *rise*) dan (1,-1) (disebut *fall*). (Deutsch, 1999)

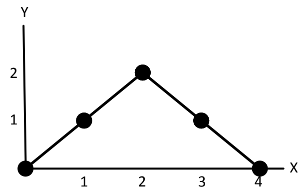
Definisi lain dari *Dyck path* (atau *Mountain path*) adalah *Lattice path* dalam koordinat bidang (x,y) dari (0, 0) to (2n, 0) dengan langkah (1, 1) (*Up*) dan (1, -1) (*Down*) tanpa pernah terletak di bawah sumbu – x. (Došlić and Veljan, 2007)

***Peak* / Puncak**

Pada *Dyck path*, suatu *peak* dapat terjadi sebagai bagian dari *path* ketika suatu *upstroke* D (↗) diikuti dengan langkah *downstroke* D*(↘). (Grimaldi, 2012)

Contoh 5 :



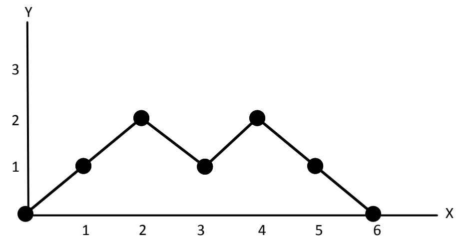


Gambar 2.5. Contoh *Dyck path* dengan *peak* berjumlah 1

***Valley* / lembah**

Suatu *valley* dalam *Dyck path* dapat terjadi sebagai bagian dari *path* ketika suatu *downstroke* D*(↘) diikuti dengan langkah *upstroke* D (↗).(Grimaldi, 2012)

Contoh 6 :

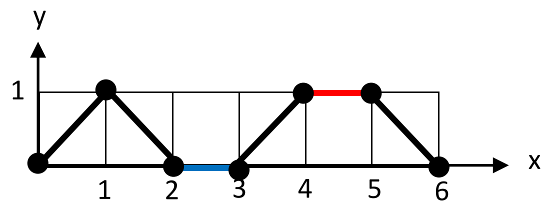


Gambar 2.6. Contoh *Dyck path* dengan *valley* berjumlah 1

K – Colored Motzkin Lattice Path

Motzkin path dengan panjang n adalah suatu *Lattice path* dari N^2 yang berjalan dari (0,0) sampai (n,0) tanpa pernah berada di bawah sumbu – x dengan langkah yang diizinkan adalah langkah diagonal ke atas / *rise* (1,1), langkah diagonal ke bawah /*fall*(1,-1) dan langkah horizontal (1,0). Jika langkah dilabeli oleh k warna, maka kita menyebutnya *K – colored Motzkin Lattice path***.** (Tsikouras dan Sapounakis, 2004)

Contoh 7 :

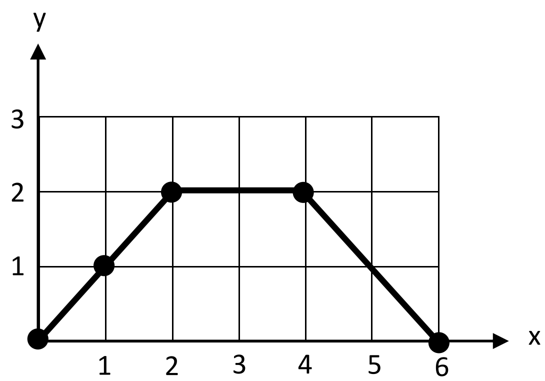


Gambar 2.7. Contoh *k – colored Motzkin Lattice path dengan k = 2*

Schröder Path

Schröder path adalah suatu barisan dengan langkah *rise* yang didefinisikan oleh (1,1), *fall* yang didefinisikan oleh (1,-1) dan langkah horizontal yang didefinisikan oleh (2,0) dimulai dari (0,0) sampai (2n,0) tanpa pernah berada di bawah sumbu - x. (Pinzani and Pergola,1999)

Contoh 8 :



Gambar 2.8. Contoh *Schröder path* dari (0,0) sampai (6,0)