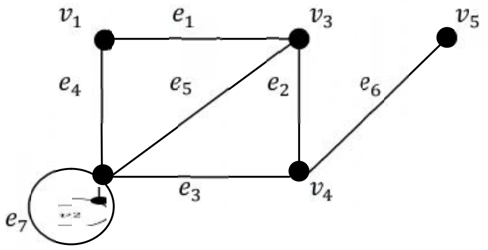
II. KONSEP DASAR GRAF DAN GRAF POHON

2.1 Konsep Dasar Graf

Teori dasar mengenai graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989).

Graf G adalah himpunan terurut ($V(G)$, $E(G)$), dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$, dan $E(G)$menyatakan himpuanan sisi yaitu pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G. Misalkan v dan w adalah titik pada graf G, jika v dan w dihubungkan oleh sisi e, maka v dan w dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik v dan w dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel dengan titik v dan w. Himpunan tetangga (*Neigborhood*) dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2. Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Pada Gambar 2. Graf (V, E) dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Titik v_3 bertetangga dengan titik v_1 , v_2 , dan v_4 sedangkan v_1 dan v_3 menempel dengan e_1 . Sebaliknya, sisi e_1 menempel pada titik v_1 dan titik v_3 .$N(v_1) = \{v_2, v_3\}$.

Derajat suatu titik *v* pada graf *G* adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik *v*, dinotasikan dengan *d(v)*. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat 1. Pada Gambar 2. $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 5$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 3$ dan v_5 adalah daun karena berderajat satu.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda atau *loop* disebut graf sederhana. Graf pada Gambar 2. bukan merupakan graf sederhana karena pada graf tersebut terdapat *loop*, yaitu pada titik v_2 .

Pada graf terhubung G, jarak diantara dua titik x dan *y* adalah panjang lintasan terpendek diantara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan d(*x*, y). Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan (*walk*), lintasan (*path*) dan sirkuit (*circuit*). Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh jalan berdasarkan Gambar 2. adalah $v_1 - e_4 - v_2 - e_3 - v_4 - e_2 - v_3 - e_5 - v_2 - e_3 - v_4 - e_6 - v_5$.

Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda. Graf *G* dikatakan graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Pada Gambar 2., Contoh lintasan adalah $v_3 - e_1 - v_1 - e_4 - v_2 - e_3 - v_4 - e_5 - v_5$.

Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup (*closed path*), yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil. Contoh sirkuit berdasarkan gambar pada Gambar 2. adalah $v_1 - e_4 - v_2 - e_5 - v_3 - e_1 - v_1$.

Berikut ini adalah lemma yang menyatakan kaitan antara jumlah derajat semua titik pada suatu graf G dengan banyak sisinya.

Lemma 2.1 *(Narsing Deo dkk. 1989) Misalkan G(V,E) adalah graf terhubung dengan* $|E| = e$*, maka :*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

Sebagai contoh pada graf Gambar 2 adalah $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5)$ = 2 + 5 + 3 + 3 + 1 = 14 = dua kali jumlah sisi .

Teorema 2.1 *(Narsing Deo dkk. 1989) Untuk sembarang graf G, banyaknya titik yang berderajat ganjil, selalu genap.*

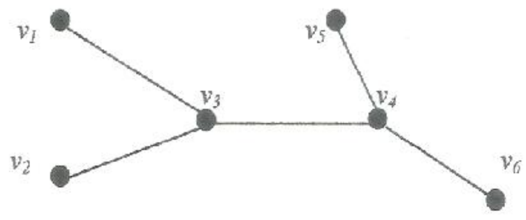
Bukti : Misalkan V_{genap} dan V_{ganjil} masing – masing adalah himpunan himpunan simpul yang berderajat genap dan berderajat ganjil pada *G(V,E)*. Maka persamaan dapat ditulis sebagi berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{Vgenap} d(v_J) + \sum_{Vganjil} d(v_k)$$

Karena $d(v_J)$ untuk setiap $v_J \in V_{genap}$, maka suku pertama dari ruas kanan persamaan harus bernilai genap. Ruas kiri persamaan juga harus bernilai genap. Ninai genap pada ruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga harus genap. Karena $d(v_k)$ untuk setiap $v_k \in V_{ganjil}$, maka banyaknya titik v_k di dalam V_{ganjil} harus genap agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap. ■

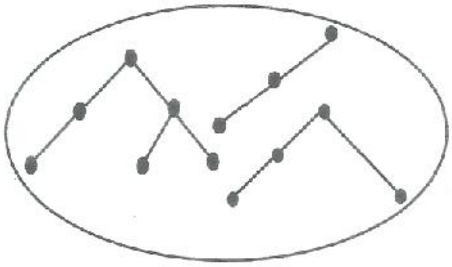
2.2 Graf Pohon

Graf pohon (*tree*) adalah suatu graf terhubung yang tidak memuat siklus. Suatu graf yang setiap titiknya mempunyai derajat satu disebut daun (*pendant vertex*).



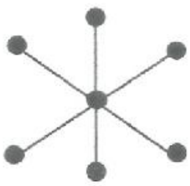
Gambar 3. Contoh pohon *G* dengan enam titik

Pada Gambar 3, graf $G(V,E)$ merupakan graf pohon karena graf tersebut merupakan graf terhubung dan tidak memuat siklus. Titik v_1, v_2, v_5, v_6 disebut *pendant vertex* atau daun. Gabungan dari beberapa pohon disebut hutan (*forest*).



Gambar 4. Contoh hutan (*forest*)

Selanjutnya, akan diberikan definisi beberapa kelas graf pohon. Suatu graf bintang $K_{1,n}$ (*star*) adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n yang disebut pusat dan titik lainnya berderajat satu (Chartrand dkk., 1998).

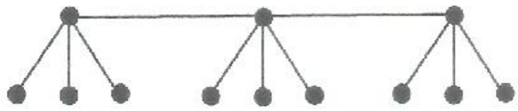


Gambar 5. Contoh graf bintang $K1,6$

Graf pohon disebut graf bintang ganda (*double star*) jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. Jika x dan y berturut-turut berderajat a+1 dan b+1, dinotasikan dengan $S_{a,b}$, (Chartrand dkk., 1998)

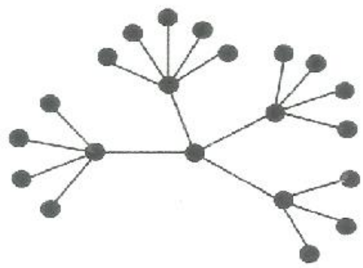
Gambar 6. Contoh graf bintang ganda $S_{3,2}$

Graf ulat (*caterpillar graf*) adalah graf pohon yang memiliki sifat apabila dihapus semua daunnya akan menghasilkan lintasan (Chartrand dkk., 1998).



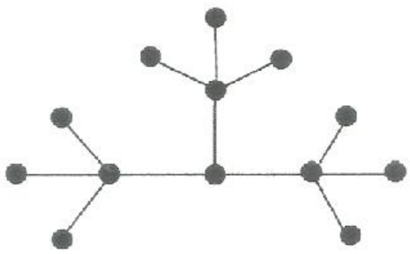
Gambar 7. Contoh graf ulat $C(3, 3, 3)$

Misalkan $G_i = K_{1,n_i}$ untuk setiap $i \in [1, k]$ dan $n_i \geq 1$. *Graf almagamasi bintang tak seragam*, $S_{k,(n_1,n_2,n_3,n_4)}$, untuk $k \geq 2$ adalah graf pohon yang diperoleh dengan menyatukan sebuah daun dari setiap graf G_i. Titik penyatuan tersebut dikatakan sebagai *titik pusat* dari $S_{k,(n_1,n_2,n_3,n_4)}$, dinotasikan dengan *x*. Titik – titik yang berjarak 1 dari titik pusat disebut dengan *titik antara*, dinotasikan dengan l_i untuk $i \in [1, k]$. Titk daun ke-*j* dari titik l_i dinotasikan dengan l_{ij} untuk $j \in [1, n_j - 1]$ (Carlson., 2006).



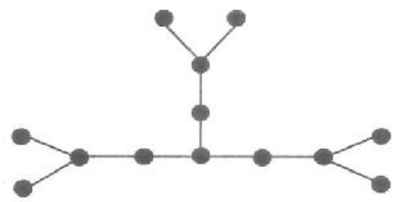
Gambar 8. Contoh graf almagasi bintang tak seragam $S_{4,(5,6,7,6)}$

Graf almagamasi bintang seragam, $S_{k,m}$ adalah almagamasi dari *k* buah graf bintang $K_{1,m}$ bila $n_i = m$, untuk setiap *i* (Asmiati dkk., 2012).



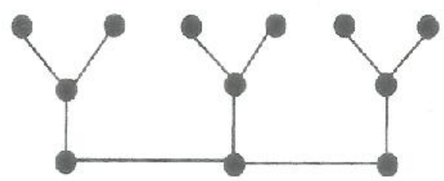
Gambar 9. Contoh graf almagamasi bintang $S_{3,4}$

Graf pohon pisang, $B_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari *n* buah graf bintang S_k dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_k ke suatu titik baru (Chen dkk.(1997)).



Gambar 10. Contoh graf pohon pisang $B_{3,4}$

Graf kembang api seragam, $F_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari *n* buah buah graf bintang S_k dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_k melalui sebuah lintasan (Chen dkk.(1997)).



Gambar 11.Contoh graf kembang api $F_{3,4}$

Selanjutnya diberikan beberapa teorema mengenai graf pohon sebagai berikut :

Teorema 2.2 *(Harsfield, N. dan G. Ringel, 1994) Jika G adalah pohon dengan p titik (vertex) dan q sisi (edge), maka* $p = q + 1$.

Bukti: Jika G adalah pohon dengan satu sisi maka teorema benar untuk G. Asumsikan teorema benar untuk semua pohon dengan sisi kurang dari n, artinya untuk $q \leq n$, maka $p = n + 1$. Misal G pohon dengan n sisi. Kita pilih satu lintasan terpanjang di G dari a ke b . Titik a harus berderajat 1. Karena kalau tidak lintasan akan menjadi lebih panjang atau terbentuk siklus di G . selanjutnya kita buang titik a, akibatnya sisi terhubung titik a terbuang. Sehingga pohon terbentuk dengan $(p-1)$ dan $(n-1)$ sisi dengan asumsi $p-1=(n-1)+1)$ diperoleh $p-1=n$ atau $p=n+1$. ■

Teorema 2.3 *(Harsfield, N. dan G. Ringel, 1994) Graf G adalah pohon jika dan hanya jika ada terdapat tepat satu lintasan di antara kedua titik tersebut.*

Bukti:

(1) Akan ditunjukkan graf G adalah pohon maka ada terdapat tepat satu lintasan di antara kedua titik.

Kita asumsikan G adalah pohon. Misal v_1 dan v_2 titik-titik di G. Maka pohon dihubungkan lintasan v_1 ke v_2. Anggaplah dua lintasan dari v_1 ke v_2, $P_1 = v_1\, u_1\, u_2 \ldots u_i v_2$ dan $P_2 = v_1\, w_1\, w_2 \ldots w_m v_2$. Jika u_1 berbeda dengan w_1 , selanjutnya P_1 sampai ditemukan suatu titik yang ada dalam P_1 yang juga dalam P_2. Maka kita mempunyai siklus . Jika $u_1 = w_1$, maka kita lihat pada u_2 . Untuk beberapa i, $u_i \neq w_i$, karena ada dua lintasan $v_1 v_2$ sebagai asumsi. Selanjutnya P_1 dari u_{i-1} sampai ditemukan suatu titik yang ada dalam P_1 yang juga dalam P_2 dan selanjutnya ambil P_2 kembali ke u_{i-1}, dan kita mendapatkan siklus lagi. Tetapi G adalah pohon, sehingga tidak ada siklus. Jadi asumsi bahwa ada dua $v_1 v_2$ lintasan salah.

(2) Akan ditunjukkan ada terdapat tepat satu lintasan di antara kedua titik maka graf G adalah pohon .

Kita asumsikan G adalah graf dengan tepat satu lintasan di antara dua titik . Pertama perhatikan G terhubung. Anggaplah bahwa G memuat siklus $v_1 v_2 \dots v_n v_1$. Jelas bahwa ada dua lintasan dari v_1 ke v_n. Ini kontradiksi , karena G mempunyai tepat satu lintasan di antara dua titik. Jadi graf G tidak memuat siklus dan G adalah pohon. ■