I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pada tahun 1736, Leonardo Euler memperkenalkan konsep teori graf dalam permasalahan Jembatan Konigsberg. Teori pewarnaan lokasi merupakan salah satu teori graf yang memiliki kontribusi besar bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Konsep bilangan kromatik pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002, dengan mengembangkan dua konsep graf, yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi graf.

Misalkan *c* suatu pewarnaan titik pada graf *G* dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk *u* dan *v* yang bertetangga di *G*. Misalkan C_i himpunan titik – titik yang diberi warna *i* , yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas – kelas warna dari *V(G)*. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari *v* adalah *k*-pasang terurut $\big(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k)\big)$ dengan $d(v, C_1)$ = min $\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap *G* mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* disebut pewarnaan lokasi *G*. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari *G*, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Pada tahun 2002, Chartrand dkk. telah menentukan pewarnaan lokasi pada graf terhubung *G*. Jika *u* dan *v* adalah dua titik yang berbeda di *G* sedemikian sehingga *d(u,w)=d(v,w)* untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika *u* dan *v* titik – titik yang tidak bertetangga di *G* sedemikian sehingga $N(u) \neq N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$. Kemudian telah ditentukan bilangan kromatik lokasi pada beberapa kelas graf, diantaranya pada graf lintasan P_n untuk $n \geq 3$ diperolah $\chi_L(P_n) = 3$; pada graf siklus diperoleh dua hasil yaitu untuk *n* ganjil diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$, dan untuk *n* genap diperoleh $\chi_L(C_n) = 4$; pada graf bintang ganda $(S_{a,b})$, $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$, diperoleh $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$. Dilanjutkan pada tahun 2003, Chartrand dkk. telah menunjukan graf berorde *n* dengan bilangan kromatik lokasinya (*n* – 1) dan juga graf – graf yang mempunyai bilangan kromatik lokasi dengan batas atasnya (*n* – 2). Selain itu, Chartrand dkk.(2003). menunjukan bahwa terdapat pohon berorde $n \geq 5$ yang mempunyai bilangan kromatik lokasi *k* jika dan hanya jika $k \in (3, 4, \ldots, n-2, n)$.

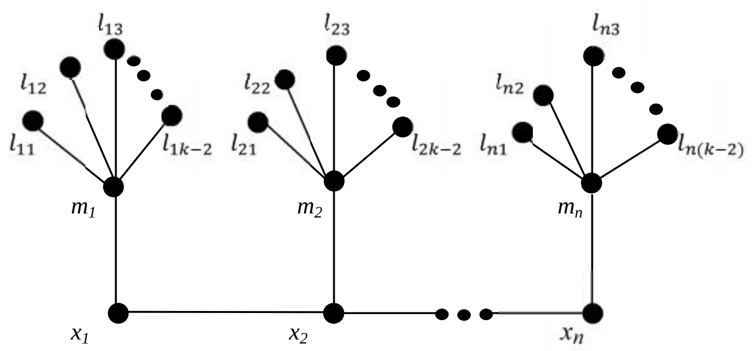
Selanjutnya pada tahun 2011 dan 2012, Asmiati dkk. telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi pada beberapa graf pohon, diantaranya graf kembang api $F_{n,k}$ untuk $n \geq 2$ diperoleh $\chi_L(F_{n,k}) = 4$ sedangkan untuk $k \geq 5$ diperoleh $\chi_L(F_{n,k}) = k - 1$, untuk $2 \leq n \leq k - 1$ dan $\chi_L(F_{n,k}) = k$ untuk lainnya; pada graf almagamasi bintang seragam, $S_{k,m}$ adalah almagamasi dari k buah graf bintang $K_{1,m}$ bila $n_i = m$, untuk setiap i diperoleh jika $H(a) = (m + a - 1)\binom{m+a-1}{m-1}$ untuk $a \geq 0$, $k \geq 2$, dan $m \geq 3$ maka $\chi_L(S_{k,m}) = m$ untuk $2 \leq k \leq H(0), m \geq 3$ dan $\chi_L(S_{k,m}) = m + a$ untuk $H(a) \leq k \leq H(0), a \geq 1$.

Selanjutnya, Asmiati (2014) telah telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf almagamansi bintang tak homogen.

Permasalahan penentuan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf, masih terbuka karena belum adanya teorema yang digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada sembarang graf. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji tentang bilangan kromatik lokasi dengan mensubdivisi graf kembang api $F_{n,k}$. Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan dari hasil – hasil penelitian Asmiati dkk. (2012).

1.2 Perumusan Masalah

Graf kembang api seragam, $F_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari *n* buah buah graf bintang S_k dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_k melalui sebuah lintasan (Chen dkk.(1997)). Misalkan $V(F_{n,k}) = \{x_i, m_i, l_{ij} | i = 1,2, \dots, n\ ; j = 1,2, \dots, k-2\}$ dan $E(F_{n,k}) = \{x_i, x_{i+1} | i = 1,2, \dots, n-1\} \cup \{x_i m_i, m_i l_{ij} | i = 1,2, \dots, n\ ; j = 1,2, \dots, k-2\}$.



Gambar 1. Graf kembang api $F_{n,k}$

Graf kembang api $F_{n,k}^{*}$ diperoleh dengan mensubdivisi graf kembang api $F_{n,k}$ sebanyak satu titik pada masing – masing sisi $x_i m_i$ untuk setiap $i \in [1, s]$. Selanjutnya graf kembang api $F_{n,k}^{s*}$ diperoleh dengan mensubdivisi graf $F_{n,k}^{*}$ sebanyak $s \geq 2$ titik genap pada masing – masing sisi $x_i y_i$ dan $y_i\, m_i$ untuk setiap $i \in [1, n]$. Akibatnya $x_i y_i$ dan $y_i\, m_i$ menjadi sebuah lintasan untuk setiap $i \in [1, n]$. Misalkan lintasan $x_i y_i = \{x_i, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, y_i\}$ untuk setiap $r \in [1, s]$ dan $s \geq 2$ genap, lintasan $y_i m_i = \{x_i, b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ir}, m_i\}$ untuk setiap $r \in [1, s]$ dan $s \geq 2$ genap. Adapun permasalahan akan dibatasi pada penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf kembang api $F_{n,k}^{s*}$ dengan *n*, *k* bilangan asli dan $s \geq 2$ titik genap.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf kembang api $F_{n,k}^{*}$ dan $F_{n,k}^{s*}$ dengan n, k bilangan asli dan $s \geq 2$ titik genap.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengembangkan wawasan tentang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi pada graf pohon.
2. Memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas dan memperdalam ilmu matematika dalam bidang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi dari graf pohon.

3. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan tentang penentuan bilangan kromatik lokasi graf pohon.