# III. BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF

Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk.(2002). Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf. Pewarnaan titik pada graf adalah $c = V(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}$ dengan syarat untuk setiap titik bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf *G* disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Berikut ini diberikan definisi bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari Chartrand dkk.(2002). Misalkan *c* suatu pewarnaan titik pada graf *G* dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk *u* dan *v* yang bertetangga di *G*. Misalkan $C_i$ himpunan titik – titik yang diberi warna *i* , yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas – kelas warna dari *V(G)*. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari *v* adalah *k*-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2)$,..., $d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_1)$ = min $\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap *G* mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* disebut pewarnaan lokasi *G*. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari *G*, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

Berikut ini Chartrand dkk.(2002) telah memberikan teorema dasar dari bilangan kromatik lokasi suatu graf.

**Teorema 3.1** ***(****Chartrand dkk, 2002) Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga d(u,w)=d(v,w) untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik – titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) \neq N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

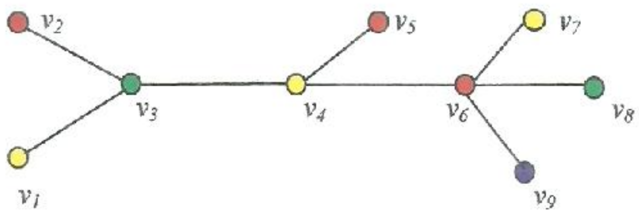
**Bukti :** misalkan $c$ adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung *G* dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik – titik $G$ ke dalam kelas warna $C_i$. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik $u$ dan $v$ berada dalam kelas warna yang sama, misalkan $C_i$ dari Π. Akibatnya $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $d(u, C_i) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga *c* bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat dari teorema tersebut, dapat ditentukan batas bawah trivial bilangan kromatik lokasi graf.

**Akibat 3.1** ***(****Chartrand dkk, 2002) Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.*

**Bukti :** Misalkan *v* adalah satu titik yang bertetangga dengan *k* daun $x_1, x_2, \dots, x_k$ di *G*. Berdasarkan teorema 3.1 , setiap pewarnaan lokasi di *G* mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $x_i$, $i = 1,2, \dots, k$. Karena *v* bertetangga dengan semua $x_i$ maka *v* harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun $x_i$. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Selanjutnya, akan diberikan contoh menentukan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf *G* seperti Gambar 12 berikut ini :




Gambar 12. Pewarnaan lokasi minimum pada graf *G*

Diberikan graf *G* seperti terlihat pada Gambar 12. akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf *G*. Karena terdapat titik $v_6$ yang memiliki 3 daun, maka berdasarkan Akibat 3.1, $\chi_L(G) \geq 4$. (3.1.1)

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf *G*. Titik – titik pada $V(G)$ dipartisi sebagai berikut : $C_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$; $C_2 = \{v_2, v_5, v_6\}$; $C_3 = \{v_3, v_8\}$; $C_4 = \{v_9\}$. Kode warnanya adalah $c_\Pi(v_1) = (0,2,1,4)$; $c_\Pi(v_2) = (2,0,1,4)$; $c_\Pi(v_3) = (1,1,0,3)$; $c_\Pi(v_4) = (0,1,1,2)$; $c_\Pi(v_5) = (1,0,2,3)$; $c_\Pi(v_6) = (1,0,1,1)$; $c_\Pi(v_7) = (0,1,2,2)$; $c_\Pi(v_8) = (2,1,0,2)$; $c_\Pi(v_9) = (2,1,2,0)$.

Karena kode warna semua titik di $V(G)$ berbeda, maka pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan lokasi, dengan $\chi_L(G) \leq 4$. (3.1.2)

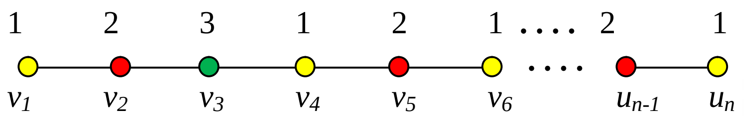
Berdasarkan persamaan (3.1.1) dan (3.1.2) diperoleh $\chi_L(G) = 4$. ■

**Teorema 3.2** *(Chartrand dkk, 2002) Misalkan k adalah derajat maksimum di graf G, maka* $\chi_L(G) \leq 1 + k$.

Berikut ini akan diberikan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf sederhana.

**Teorema 3.3** *(Chartrand dkk, 2002) Bilangan kromatik lokasi graf lintasan* $P_n(n \geq 3)$ *adalah 3.*

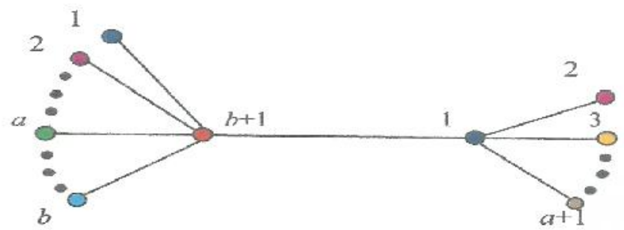
**Bukti :** Perhatikan bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Jelaslah bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Teorema 3.2 $\chi_L(G) \leq 1 + k$, dengan $k$ derajat titik maksimum. Karena pada $P_n, k = 2$, maka $\chi_L(P_n) \leq 1 + 2$. Akibatnya $\chi_L(G) \leq 3$. Jadi terbukti $\chi_L(P_n) = 3$. ■




Gambar 13. Pewarnaan lokasi minimum pada graf lintasan $P_n$

**Teorema 3.4** *(Chartrand dkk, 2002) Untuk bilangan bulat a dan b dengan* $1 \leq a \leq b$ *dan* $b \geq 2$ $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$.

**Bukti :** Berdasarkan Akibat 3.1, diperoleh batas bawah yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \leq b+1$. Selanjutnya, akan ditentukan batas atasnya yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \leq b+1$. Misalkan *c* adalah pewarnaan titik menggunakan (b+1) warna sebagaimana terlihat pada Gambar 14. Perhatikan bahwa kode warna dari setiap titik $S_{a,b}$ berbeda, akibatnya *c* adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(S_{a,b}) \leq b+1$. ■

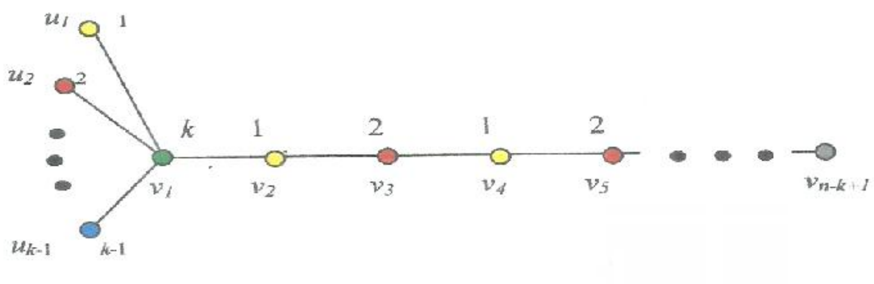



Gambar 14. Pewarnaan lokasi minimum pada $S_{a,b}$

Chartrand dkk. (2003) telah mendapatkan bentuk graf pohon berorde $n \geq 5$ yang memiliki bilangan kromatik lokasi dari 3 sampai *n*, kecuali *n*-1, sebagaimana torema berikut ini.

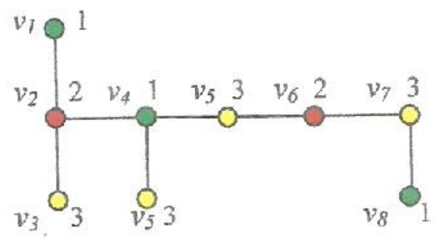
**Teorema 3.5** ***(****Chartrand dkk, 2002) Terdapat Pohon berorde $n \geq 5$ yang mempunyai bilangan kromatik k jika dan hanya jika* $k \in (3,4,\dots,n-2,n)$.

Pewarnaan Teorema 3.5 dapat diberikan sebagai berikut :




Gambar 15. Pohon T berorde *n* dengan $\chi_L(T) = k$

Selanjutnya akan diberikan beberapa definisi tentang titik dominan dan *clear* path yang diambil dari Asmiati dkk. (2012). Misalkan $c$ adalah $k$-pewarnaan lokasi pada graf *G(V,E)* dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_1, \ldots, C_1\}$ adalah partisi dari *V(G)* yang diinduksi oleh $c$. Titik $v \in V(G)$dikatakan suatu titik dominan jika $d(v, C_i) = 1$, jika $v \notin C_i$ . Suatu lintasan yang menghubungkan dua titik dominan di graf G disebut *clear path*, jika semua titik internalnya bukan merupakan titik dominan.




Gambar 16. Graf *G* dengan 3 titik dominan

Titik dominan pada Gambar 16. adalah $v_2$, $v_4$, dan $v_7$. *Clear path* pada Gambar 16. adalah lintasan yang menghubungkan $v_4$ dan $v_7$ dimana tidak terdapat titik dominan dalam titik internalnya. Karena graf *G* pada Gambar 16. mempunyai bilangan kromatik lokasi tiga, maka panjang *clear path* dari graf *G* ganjil. ■

**Lemma 3.1** *(Asmiati dkk, 2013) Diberikan graf G dengan* $\chi_L(G) = k$ *maka terdapat paling banyak k titik dominan di G dan masing-masing titik dominan memiliki warna yang berbeda.*

**Bukti :** Misalkan $v \in G$ merupakan titik dominan dan *G* adalah graf terhubung, maka $d(v, C_i) = 0$ untuk $v \in C_i$ dan $d(v, C_i) = 1$untuk $v \notin C_i$ . Karena $\chi_L(G) = k$, maka kelas partisi Π memuat *k* kelas warna, katakan $C_1, C_1, \dots, C_1$ dan setiap $x \in G$ memiliki kode warna yang berbeda. Oleh karena itu, *G* paling banyak memuat sebanyak *k* titik dominan dan masing – masing titik dominan pada *G* memiliki kode warna yang berbeda. ■

**Lemma 3.2** (*Asmiati dkk, 2013) Misalkan graf G dengan* $\chi_L(G) = 3$, *maka panjang dari setiap clear path di G adalah ganjil.*

**Bukti :** Misalkan *G* adalah graf terhubung dan P adalah *clear path* yang menghubungkan 2 titik dominan *x* dan *y* di *G*. Asumsikan *c(x)* = 1 dan *c(y)=2*. Karena P adalah *clear path* maka warna dari titik titik didalamnya harus 1 dan 2 berturut-turut. Misalkan *x* dan *y* akan membentuk barisan alternating. Karena banyaknya titik dalam *clear path* P harus genap, maka panjang P ganjil. ■

**Lemma 3.3** (*Asmiati dkk, 2013) Misalkan G adalah graf terhubung dengan* $\chi_L(G) = 3$ *Jika memuat 3 titik dominan maka terdapat 3 titik dominan dalam suatu lintasan.*

**Bukti :** Misalkan *G* adalah graf terhubung dan *x*, *y* dan *z* adalah tiga titik dominan dari graf *G*. *P* adalah lintasan yang menghubungkan *x* dan *z*. Asumsikan *y* tidak terdapat dalam lintasan *P*. Karena G adalah graf terhubung maka terdapat titik dalam *u*, sehingga *u* memiliki jarak terpendek (dibandingkan dengan titik dalam lainnya) ke *y*. Lintasan $L_1$ menghubungkan *x* ke *u* kemudian ke *y*. Sehingga lintasan $L_1$ adalah *clear path*. Oleh karena itu, panjangnya lintasan tersebut adalah ganjil. Sekarang, pertimbangkan lintasan *L2* yang menghubungkan *y* ke *u* kemudian ke *z*. Maka, *L2* merupakan *clear path*. Oleh karena itu, panjangnya adalah ganjil. Kedua fakta tersebut menyatakan panjang dari lintasan yang menghubungkan *x* ke *u* ditambahpanjang lintasan yang menghubungkan *u* ke *z* panjangnya adalah genap, kontradiksi.

Selanjutnya Asmiati dkk. (2012) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf kembang api $F_{n,k}$ untuk $n \geq 2$ dan $k \geq 5$, sebagimana teorema berikut ini.

**Teorema 3.6** *(Asmiati dkk, 2012) Misalkan $F_{n,k}$ graf kembang api, maka:*

*i.* $\chi_L(F_{n,4}) = 4\,; n \geq 2$

*ii.* *Untuk $k \geq 5$*

$$\chi_L(F_{n,k}) = \begin{cases} k-1\,; 2 \leq n \leq k-1 \\ k \quad ;\text{lainnya} \end{cases}$$

**Bukti:** Misalkan $V(F_{n,k}) = \{x_i, m_i, l_{ij} | i = 1,2, \dots, n\,; j = 1,2, \dots, k-2\}$ dan $E(F_{n,k}) = \{x_i, x_{i+1} | i = 1,2, \dots, n-1\} \cup \{x_i m_i, m_i l_{ij} | i = 1,2, \dots, n\,; j = 1,2, \dots, k-2\}$. Pertama akan ditentukan batas bawah dari $F_{n,k}$ untuk $n \geq 2$. Berdasarkan Akibat 3.1, $\chi_L(F_{n,4}) \geq 3$ untuk $n \geq 2$. Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $\chi_L(F_{n,4}) \geq 4$. Untuk suatu kontradiksi, andaikan terdapat pewarnaan-3 lokasi untuk $F_{n,k}$ ; $n \geq 2$, jika ketiga warna itu adalah 1,2,3 maka $\{c(m_1), c(l_{11}), c(l_{12})\} = \{c(m_2), c(l_{21}), c(l_{22})\} = \{1,2,3\}$ sangat jelas, $c(m_1) \neq c(m_2)$, jika tidak, kode warna dari $l_{1i}$ dan $l_{2j}$ untuk suatu $i, j \in \{1,2\}$ adalah sama, suatu kontradiksi. Pandang $c(x_i)$ untuk $i = 1,2$ . Tanpa mempertimbangkan warna dari $x_2$, kode warna titik $x_1$ akan sama dengan kode warna dari $l_{1j}$ atau $m_2$, suatu kontradiksi. Akibatnya $\chi_L(F_{n,4}) \geq 4$. (3.1.3)

Akan ditentukan batas atas dari $F_{n,4}$ untuk $n \geq 2$. Untuk menunjukan bahwa $\chi_L(F_{n,4}) \leq 4$ untuk $n \geq 2$, pandang pewarnaan-4 pada $F_{n,k}$ sebagai berikut :

- $c(x_i) = 1$ jika i ganjil dan $c(x_i) = 3$ jika i genap.
- $c(m_i) = 2$ untuk setiap $i$;
- Untuk semua titik $l_{ij}$ , definisikan:

$$c(l_{ij}) = \begin{cases} 4 & \text{jika } i = 1, j = 1 \\ 1 & \text{jika } i \geq 2, j = 1 \\ 2 & \text{jika } j = 2 \end{cases}$$

Pewarnaan c akan membangun suatu partisi $\Pi$ pada $V(F_{n,4})$. Akan ditunjukan bahwa kode warna dari semua titik di $F_{n,4}$ berbeda. Untuk $i$ ganjil diperoleh $c_\Pi(x_i) = (0,1,1,i+1)$ dan untuk $i$ genap $c_\Pi(x_i) = (1,1,0,i+1)$. Untuk $m_i$ diperoleh $c_\Pi(m_1) = (1,0,1,1)$ dan $c_\Pi(m_i) = (11,0,1,i+)$ untuk $i \geq 2$. Untuk titik – titik $l_{ij}$ diperoleh $c_\Pi(l_{11}) = (2,1,2,0)$ dan $c_\Pi(l_{12}) = (2,1,0,2)$. Untuk $i \geq 2$, $c_\Pi(l_{i1}) = (0,1,2,i+3)$ dan $c_\Pi(l_{i2}) = (2,1,0,i+3)$. Karena kode warna dari semua titik $F_{n,4}$ berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi.

Jadi $\chi_L(F_{n,4}) \leq 4$. (3.1.4)

Berdasarkan persamaan (3.1.3) dan (3.14), diperoleh $\chi_L(F_{n,4}) = 4; n \geq 2$ ■

Akan ditunjukan bahwa untuk $k \geq 5, \chi_L(F_{n,k}) = k$ dan $\chi_L(F_{n,k}) = k - 1$ ; jika $2 \leq n \leq k - 1$. Pandang dua kasus berikut ini :

**Kasus 1.** Untuk $k \geq 5$ dan $2 \leq n \leq k-1$

Pertama akan ditentukan batas bawah dari $F_{n,k}$, untuk $k \geq 5$dan $2 \leq n \leq k-1$. Karena setiap titik $l_i$ bertetangga dengan $(k-2)$ daun, maka berdasarkan Akibat 3.1, $\chi_L(F_{n,k}) \geq k-1$. (3.1.5)

Akan ditunjukan bahwa $\chi_L(F_{n,k}) \leq k-1$ untuk k ≥ 5 dan $n \leq k-1$. Definisikan suatu pewarnaan-$(k-1)$ pada $F_{n,k}$ sebagai berikut. Beri warna $c(m_i) = i$, untuk $i \in [1,n]$ dan semua daun: $\{l_{ij} | j = 1,2, \dots, k-2\}$ dengan $\{1,2,\dots,k-1\} \backslash \{i\}$ untuk sembarang *i*. Selanjutnya definisikan $c(x_i)$, untuk $i \in [1,n]$ secara berturut – turut dengan warna 3, 4, 5, . . . , *n*, 2,3. Catatan: jika $n = 2$, maka $c(x_1) = 2$ dan $c(x_2) = 3$. Akibatnya, pewarnaan $c$ akan membangun suatu partisi $\prod = \{U_1, U_2, \dots, U_{k-1}\}$ pada $V(F_{n,k})$, dengan $U_i$ adalah himpunan dari semua titik yang berwarna *i*.

Akan ditunjukan bahwa kode warna untuk semua titik di $F_{n,k}$ untuk k ≥ 5 dan $n \leq k-1$. Misalkan $u, v \in V(F_{n,k})$ dan $c(u) = c(v)$ maka pandang kasus – kasus berikut ini :

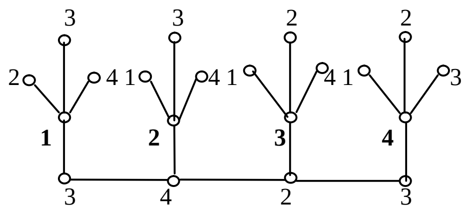
- Jika $u = l_{ij}, v = l_{jl}$ untuk suatu *i, j, h, l* dan $i \neq j$, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ karena $d(u, U_i) \neq d(v, U_i)$.
- Jika $u = l_{ih}, v = m_j$ untuk suatu *i, j, h,* dan $i \neq j$, maka karena *u* bukan titik dominan dan *v* harus menjadi titik dominan . Jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.

- Jika $u = l_{ih}, v = x_j$ untuk suatu *i*, *j*, *h*, maka terdapat tepat satu himpunan di Π yang mempunyai jarak 1 di *u* dan terdapat sedikitnya dua himpunan di Π yang mempunyai jarak 1 di *v*. Jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = m_i, v = x_j$ untuk suatu *i*, *j* dan $i \neq j$, maka karena *u* harus menjadi titik dominan dan *v* bukan titik dominan. Jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = x_i$ dan $v = x_j$ maka $i = 1$ dan $j = n$ jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.

Berdasarkan semua kasus di atas dapat disimpulkan bahwa kode warna dari semua titik di $F_{n,k}$ untuk $k \geq 5$ dan $n \leq k - 1$ adalah berbeda, jadi $\chi_L(F_{n,k}) \leq k - 1$ (3.1.6)

Berdasarkan persamaan (3.1.5) dan (3.1.6), diperoleh $\chi_L(F_{n,k}) = k - 1$ untuk $k \geq 5$ dan $n \leq k - 1$. ■

Sebagai ilustrasi, diberikan pewarnaan lokasi dari $F_{4,5}$ yang dapat dilihat pada Gambar 17.




Gambar 17. Pewarnaan lokasi minimum dari $F_{4,5}$

**Kasus 2,** Untuk $k \geq 5$ dan $n \geq k$

Akan ditentukan batas bawah untuk $k \geq 5$ dan $n \geq k$. Berdasarkan Akibat 3.1 , diperoleh $\chi_L(F_{n,k}) \geq k - 1$. Tetapi akan ditunjukan bahwa $k - 1$ warna tidaklah cukup untuk mewarnai. Untuk suatu kontradiksi, andaikan terdapat pewarnaan

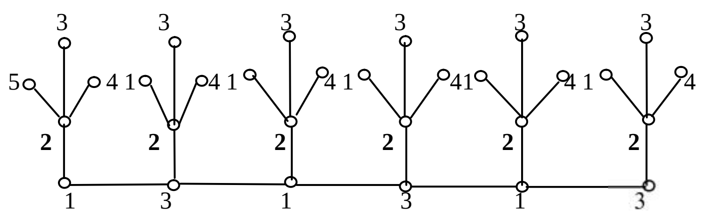
$(k-1)$ lokasi c pada $F_{n,k}$ untuk $k \geq 5$ dan $n \geq k$. Karena $n \geq k$, maka terdapat dua $i$, $j$, $i \neq j$ sedemikian sehingga $\{c(l_{ih}) | h = 1,2,\ldots,k-2\} = \{c(l_{jl}) | h = 1,2,\ldots,k-2\}$. Akibatnya kode warna $m_i$ dan $m_j$ akan sama, suatu kontradiksi.

Akan ditentukan batas atas dari $F_{n,k}$ untuk $k \geq 5$, $n \geq k$. Untuk menunjukan $F_{n,k} \leq k$, $k \geq 5$ dan $n \geq k$ pandang pewarnaan lokasi c pada $F_{n,k}$ sebagai berikut:

- $c(x_i) = 1$ jika i ganjil dan $c(x_i) = 3$ jika i genap.
- $c(m_i) = 2$, untuk setiap *i*.
- Jika $A = \{1,2,\ldots,k\}$, definisikan

$$\{c(l_{ij}) | j = 1,2,\ldots,k-1\} = \begin{cases} A \backslash \{1,2\} & \text{jika } i = 1 \\ A \backslash \{2,k\} & \text{lainya.} \end{cases}$$

Sangat mudah untuk membuktikan bahwa semua kode warna dari semua titik berbeda. Akibatnya, *c* adalah pewarnaan lokasi pada $F_{n,k}$, jadi $\chi_L(F_{n,k}) \leq k$, untuk $n \geq k$. ■




Gambar 18. Pewarnaan lokasi minimum dari $F_{6,5}$

Penelitian tesis ini merupakan penelitian lanjutan yang telah dilakukan oleh Asmiati dkk.(2012). Penelitian ini bertujuan untuk melihat perluasan yang dapat dilakukan pada graf kembang api $F_{n,k}$ sedemikian sehingga mempertahankan bilangan kromatik lokasinya. Perluasan graf kembang api yang peneliti lakukan adalah dengan memberikan subdivisi pada sisi $x_i\, m_i$ untuk setiap $i \in [1, n]$.

**Kasus 1**. Graf kembang api yang disubdivisi satu titik pada $x_i\, m_i$ untuk setiap $i \in [1, n]$ , dinotasikan dengan $F_{n,k}^*$. Langkah – langkah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf kembang api $F_{n,k}^*$ adalah sebagai berikut :

1) Penentuan batas bawah dari $\chi_L(F_{n,k}^*)$. Berdasarkan Akibat 3.1, dapat ditentukan batas awal dari bilangan kromatik lokasi .
2) Penentuan batas atas dari $\chi_L(F_{n,k}^*)$. Pada graf kembang api $F_{n,k}^*$ dapat dilakukan counting untuk menentukan batas atasnya. Pewarnaan lokasinya sama dengan graf kembang api $F_{n,k}$ , tetapi disubdivisi satu titik $y_i$ pada $x_i\, m_i$ untuk setiap $i \in [1, n]$.

**Kasus 2.** Graf kembang api $F_{n,k}^{s*}$ diperoleh dengan mensubdivisi graf $F_{n,k}^*$ sebanyak $s \geq 2$ titik genap pada masing – masing sisi $x_i y_i$ dan $y_i\, m_i$ untuk setiap $i \in [1, n]$. Akibatnya $x_i y_i$ dan $y_i\, m_i$ menjadi sebuah lintasan untuk setiap $i \in [1, n]$; untuk setiap $r \in [1, s]$ dan $s \geq 2$ genap. Misalkan lintasan $x_i y_i = \{x_i, a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}, y_i\}$ dan lintasan $y_i m_i = \{x_i, b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ir}, m_i\}$ untuk setiap $i \in [1, n]$; untuk setiap $r \in [1, s]$ dan $s \geq 2$ genap. Langkah – langkah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf kembang api $F_{n,k}^{s*}$ adalah sebagai berikut :

1) Penentuan batas bawah dari $\chi_L(F_{n,k}^{s*})$. Berdasarkan Akibat 3.1, dapat ditentukan batas awal dari bilangan kromatik lokasi .
2) Penentuan batas atas dari $\chi_L(F_{n,k}^{s*})$. Pada graf kembang api $F_{n,k}^{s*}$ dapat dilakukan counting untuk menentukan batas atasnya. Pewarnaan lokasinya

sama dengan graf kembang api $F_{n,k}^*$, tetapi disubdivisi sebanyak $s \geq 2$ titik genap pada masing – masing sisi $x_i y_i$ dan $y_i m_i$ untuk setiap $i \in [1, n]$. Untuk $c(a_{ir}) = c(y_i)$ untuk *r* ganjil dan $c(a_{ir}) = c(x_i)$ untuk *r* genap, untuk $c(b_{ir}) = c(m_i)$ untuk *r* ganjil dan $c(b_{ir}) = c(y_i)$ untuk *r* genap setiap $r \in [1, s]$dan s ≥ 2 genap.