II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan mengenai konsep teori grup, teorema lagrange dan autokomutator yang akan digunakan dalam penelitian. Pada bagian pertama ini akan dibahas tentang teori grup.

2.1 Teori Grup

Suatu operasi biner $*$ pada suatu himpunan S adalah fungsi yang memetakan dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*\,((a, b))$ dinotasikan sebagai $a * b$ di S (Fraleigh, 1999).

Contoh 2.1.1

1. Operasi penjumlahan (+) biasa pada bilangan riil $\mathbb{R}$ merupakan operasi biner.
2. Diberikan $a, b \in \mathbb{Z}^+$, maka $a + b \in \mathbb{Z}^+$. Operasi penjumlahan (+) merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}^+$.

Pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan suatu operasi biner + (penjumlahan) dapat dilihat beberapa sifat yang terpenuhi di dalamnya. Salah satu sifatnya, penjumlahan bilangan bulat bersifat asosiatif. Di dalam himpunan bilangan bulat terdapat bilangan 0 dengan sifat untuk sebarang bilangan bulat jika ditambahkan dengan 0, maka hasilnya adalah bilangan bulat itu sendiri. Selanjutnya, untuk sebarang bilangan bulat $a \in \mathbb{Z}$ terdapat bilangan bulat lain yaitu $-a \in \mathbb{Z}$ yang apabila dijumlahkan hasilnya adalah 0. Sifat-sifat himpunan bilangan bulat tersebut memotivasi lahirnya konsep teori grup.

Suatu grup $(G,*)$ adalah himpunan tak kosong G tertutup atas operasi biner $*$, sedemikian sehingga memenuhi aksioma – aksioma :

(i) Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku :

$(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$ (asosiatif terhadap operasi biner *)

(ii) Terdapat suatu elemen identitas e di G sedemikian sehingga

untuk setiap $x \in G$, berlaku

$e * x = x * e = x$ (terdapat identitas e terhadap operasi biner $*$).

(iii) Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen a^{-1} di G sedemikian sehingga

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (terdapat invers dari a yaitu a^{-1})

(Fraleigh, 1999).

Contoh 2.1.2

1. Diberikan $n \in \mathbb{Z}^+$ dengan himpunan $n\mathbb{Z} = \{nm | m \in \mathbb{Z}\}$, maka $(n\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup.
2. Himpunan $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan.
3. Himpunan $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dan $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ adalah grup terhadap operasi perkalian.
4. Himpunan $\mathbb{Z}^+$ dengan operasi biner penjumlahan (+) bukan merupakan grup karena tidak memiliki elemen identitas dan tidak memiliki invers.
5. Himpunan $G = \{-1,1\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian.

6. Himpunan $G = \{-1,1\}$ bukan merupakan grup terhadap operasi penjumlahan karena tidak memiliki elemen identitas terhadap operasi penjumlahan.

Dalam grup $(G,*)$ terdapat himpunan bagian yang lebih kecil, sebagai contoh grup $(\mathbb{Z},+)$ adalah himpunan bagian dari grup $(\mathbb{Q},+)$. Hal ini mendasari pendefinisian dari suatu subgrup. Subgrup diartikan sebagai himpunan bagian dari suatu grup yang juga merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada grup tersebut. Jika suatu himpunan bagian H dari grup G tertutup atas operasi biner pada G, maka H adalah subgrup dari G yang dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ tetapi $H \neq G$ (Fraleigh, 1999).

Contoh 2.1.3

1. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan.
2. Jika G grup, maka elemen identitas $\{e\}$ merupakan subgrup G atau sering disebut subgrup trivial dari G.
3. $n\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$ dengan operasi biner penjumlahan.

Tidak semua himpunan bagian dari grup $(G,*)$ merupakan subgrup. Subgrup memiliki beberapa kriteria yang harus dipenuhi. Himpunan bagian H dari grup G merupakan subgrup jika dan hanya jika memenuhi :

(i) $H \neq \emptyset$

(ii) Untuk setiap $x, y \in H, xy^{-1} \in H$.

Contoh 2.1.4

1. Diberikan himpunan $H = \{x \in G | ax = xa\}$ dengan $a \in G$, maka H merupakan subgrup dari G.
2. Diberikan G grup, $a \in G$, dan didefinisikan $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, maka H merupakan subgrup dari G.

Berdasarkan jumlah elemen yang terdapat di dalam grup G, grup G dibagi menjadi dua yaitu grup berhingga dan grup tak berhingga.
Jika elemen-elemen yang terdapat di dalam grup G sebanyak hingga, maka G dikatakan grup berhingga. Jika elemen-elemen yang terdapat di dalam grup G sebanyak tak berhingga, maka G dikatakan grup tak berhingga (Gilbert, 2009).

Contoh 2.1.5

1. $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ merupakan grup hingga yang komutatif.
2. Quarternion grup $(\boldsymbol{Q}_8, \cdot)$ dengan $\boldsymbol{Q}_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ merupakan grup berhingga yang tidak komutatif karena $i \cdot j = k$ sedangkan $j \cdot i = -k$, $j \cdot k = i$ sedangkan $k \cdot j = -i$, dan $k \cdot i = j$ sedangkan $i \cdot k = -j$.
3. $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup tidak berhingga.

Bila suatu grup $(G,*)$memenuhi sifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$, maka grup G tersebut dinamakan grup komutatif. Selainnya disebut grup tidak komutatif (Fraleigh,1999).

Contoh 2.1.6

1. Himpunan $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ terhadap operasi perkalian merupakan grup komutatif.
2. $(\mathbb{Z}_3,\ +_3)$ merupakan grup komutatif.
3. Himpunan $D_{nxn}\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai himpunan matriks diagonal berorde nxn yang *invertible* dengan entri bilangan riil dan dilengkapi dengan operasi biner perkalian matriks $(\cdot)$ merupakan grup komutatif.

Dari dua grup dengan masing – masing operasi binernya, dapat dibentuk suatu hubungan berbentuk fungsi yang sifatnya mempertahankan operasi dari grup yang pertama pada grup yang kedua. Sehingga, dapat didefinisikan homomorfisma sebagai berikut.

Suatu homomorfisma dari grup A ke grup B adalah pemetaan α dari A ke B, sedemikian sehingga $\alpha(ab) = \alpha(a)\,\alpha(b)$ untuk semua $a, b\ \in A$ (Fraleigh, 1999).

Contoh 2.1.7

Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$ pemetaan $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dengan $\alpha\ (n) = n$ merupakan homomorfisma.

Berdasarkan sifat yang dimiliki homomorfisma grup, maka homomorfisma grup dapat dibentuk monomorfisma grup, epimorfisma grup, dan isomorfisma grup. Monomorfisma grup adalah suatu homomorfisma grup yang bersifat injektif. Epimorfisma grup adalah suatu homomorfisma grup yang bersifat surjektif. Isomorfisma grup adalah suatu homomorfisma grup yang bersifat bijektif. Dua grup A dan B adalah isomorfik jika terdapat isomorfisma dari A pada B, hubungan ini dinotasikan $A \cong B$ (Grillet,2000).

Contoh 2.1.8

1. Diberikan $(\mathbb{Z}, +)$ grup bilangan bulat dengan operasi penjumlahan biasa dan $(\mathbb{R}, +)$ grup bilangan riil dengan operasi penjumlahan biasa.

   Didefinisikan fungsi $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dengan $\alpha(a) = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

   Karena $(ab) = ab = \alpha(a)\alpha(b)$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, maka α merupakan homomorfisma. Jelas bahwa jika $\alpha(a) = \alpha(b)$, maka $a = b$.

   Oleh karena itu α bersifat injektif. Jadi α adalah suatu monomorfisma.

2. Diberikan $(\mathbb{R}, +)$grup bilangan bulat dengan operasi penjumlahan biasa dan $(\mathbb{R}^+, \cdot)$grup bilangan riil positif dengan operasi perkalian biasa.

   Didefinisikan fungsi $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dengan $\alpha(a) = e^a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$.

   Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ sehingga $\alpha(a + b) = e^{a+b} = e^a e^b = \alpha(a)\alpha(b)$. Jadi α adalah suatu homomorfisma. Selanjutnya, akan ditunjukkan α bersifat injektif.

   Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $\alpha(a) = \alpha(b)$, maka

   $$e^a = e^b$$

   $$\Leftrightarrow ln\, e^a = ln\, e^b$$

   $$\Leftrightarrow \quad a = b$$

   Sehingga, terbukti bahwa α bersifat injektif.

   Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa α bersifat surjektif.

Untuk setiap $x \in R^{+}$ maka terdapat $a \in R$ sedemikian sehingga $a = \ln x$ atau $x = e^{a}$. Akibatnya, α bersifat surjektif. Oleh karena itu, α merupakan isomorfisma.

Dari homomorfisma grup G dapat dibentuk endomorfisma dan automorfisma. Suatu endomorfisma dari grup G adalah suatu homomorfisma dari G ke G. Suatu automorfisma dari grup G adalah suatu isomorfisma dari G ke G (Grillet,2000).

Contoh 2.1.9

1. Diberikan G suatu grup dengan elemen identitas e. Didefinisikan fungsi $\alpha: G \longrightarrow G$ dengan $\alpha(a) = e$, untuk setiap $a \in G$. Misal sebarang $a, b \in G$ maka

   $\alpha(ab) = e = ee = \alpha(a)\,\alpha(b)$. Oleh karena itu, α adalah suatu endomorfisma.

2. Diberikan G suatu grup dan $\alpha: G \longrightarrow G$ adalah fungsi konjugasi dalam G, yaitu untuk suatu elemen tetap $g \in G$ dan untuk setiap $a \in G$ fungsi α didefinisikan dengan $\alpha(a) = gag^{-1}$.

   Untuk setiap $a, b \in G$, berlaku

   $$\begin{aligned} \alpha(ab) &= gabg^{-1} \\ &= gag^{-1}gbg^{-1} \\ &= \alpha(a)\,\alpha(b). \end{aligned}$$

   Sehingga, α adalah homomorfisma.

   Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa α bersifat injektif. Diberikan sebarang $a, b \in G$ dengan $\alpha(a) = \alpha(b)$, maka

$$gag^{-1} = gbg^{-1}$$

$g^{-1}gag^{-1}g = g^{-1}gbg^{-1}g$ (dioperasikan g dari kanan, dan g^{-1} dari kiri)

$$a = b.$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa α bersifat injektif.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa α bersifat surjektif. Untuk setiap $a \in G$ diperoleh $\alpha(g^{-1}ag) = gg^{-1}agg^{-1} = a$. Sehingga, terbukti bahwa α bersifat surjektif. Jadi, telah dibuktikan bahwa α merupakan automorfisma.

Misalkan G grup dan H subgrup dari G. Apabila $a \in H$ maka $a^2 = aa \in H, a^3 = a^2a \in H, \dots, a^n \in H$ dan $a^{-1} \in H, a^{-2} = a^{-1}a^{-1} \in H, \dots, a^{-n} \in H$. Dengan demikian suatu subgrup yang memuat a haruslah memuat a^n untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Hal tersebut yang mendasari terbentuknya grup siklik.

Grup G dinamakan grup siklik apabila terdapat $a \in G$ sehingga $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ yang disimbolkan dengan $\langle a \rangle$ dan elemen a sebagai pembangun (generator) (Isnarto, 2008).

Contoh 2.1.10:

$\langle \mathbb{Z}_5, + \rangle$ merupakan grup siklik dengan generator pembangun $\bar{1}$ atau $\bar{2}$ atau $\bar{3}$ atau $\bar{4}$.

Diketahui G grup dan $a \in G$, order dari a didefinisikan sebagai banyaknya elemen $\langle a \rangle$ disimbolkan dengan $o\langle a \rangle = |\langle a \rangle|$. Jika $\langle a \rangle$ tak berhingga maka a berorder tak berhingga. Apabila $a \in G$ dan $o\langle a\rangle = n$ maka n merupakan bilangan bulat positif terkecil sehingga $a^n = e$.

Grup siklik memiliki beberapa sifat yaitu :

a.) Setiap grup siklik merupakan grup abel.

Bukti :

Misal G grup siklik dengan generator pembangun a.

Diambil sebarang $, y \in G$, maka terdapat bilangan bulat m dan n sehingga $x = a^m$ dan $y = a^n$. Diperoleh $xy = a^m a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n a^m = yx$.

Jadi G grup abel.

b.) Setiap subgrup dari grup siklik adalah siklik

Bukti :

Misalkan G grup siklik dengan generator pembangun a dan H subgrup dari G.

i. Jika $H = \{e\}$ maka $H = \langle e\rangle$. Jadi H siklik.

ii. Misalkan $H \notin \{e\}$ maka terdapat $a^n \in H$. Misalkan m bilanganbulat positif terkecil maka $a^m \in H$. Akan ditunjukkan $H = \langle a^m\rangle$.

Ambil sebarang $x \in H$

Karena $H \subset G$ maka $x = a^p$ untuk suatu bilangan bulat p.

Berdasarkan algoritma pembagian terdapat bilangan bulat q dan r sehingga $p = mq + r$ dengan $0 \leq r < m$.

Diperoleh $a^p = a^{mq+r}$

$$= a^{mq} + a^r$$

Sehingga $a^r = a^p a^{-mq}$

$$= a^p (a^m)^{-q}$$

Karena $a^p, a^m \in H$ dan H subgrup maka $a^p (a^m)^{-q} \in H$, jadi $a^r \in H$.

Karena m bilangan bulat positif terkecil sehingga $a^m \in H$dan $0 \leq r < m$ maka haruslah $r = 0$. Dengan demikian $p = mq$. Jadi $x = a^{mq} = (a^m)^q$. Terbukti bahwa $H = \langle a^m \rangle$.

Berdasarkan (i) dan (ii) maka dapat disimpulkan bahwa setiap subgrup dari grup siklik merupakan grup siklik (Isnarto, 2008).

Meskipun dapat dibuktikan bahwa semua subgrup dari grup siklik merupakan grup siklik dan semua subgrup dari grup abel merupakan grup abel, tetapi bagaimana orde dari suatu subgrup *H* dibandingkan dengan orde dari grup yang mengandung H dan bagaimana orde dari suatu anggota grup *G* dibandingkan orde dari *G*. Hal tersebut memotivasi lahirnya Teorema Lagrange. Sebelum membahas Teorema Lagrange, berikut ini akan dibahas mengenai koset dari subgrup G.

2.2 Koset

Misalkan G grup dan H subgrup G didefinisikan relasi $\sim_L$ dan $\sim_R$ pada G dengan aturan :

(i) $a \sim_L b$ jika dan hanya jika $a^{-1}b \in H$

(ii) $a \sim_R b$ jika dan hanya jika $ab^{-1} \in H$.

Maka $\sim_L$ dan $\sim_R$ merupakan relasi ekuivalensi.

Berikut definisi formal dari koset.

Misalkan G grup dan H subgrup G dan $a \in G$.

(i) $aH = \{ah \mid h \in H\}$ dinamakan koset kiri dari H yang memuat a.

(ii) $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ dinamakan koset kanan dari H yang memuat a.

Jika G merupakan grup abelian, maka partisi dari G ke dalam koset-koset kiri dari H sama dengan partisi dari G ke dalam koset-koset kanan dari H atau dinotasikan dengan $Ha = aH$ untuk setiap $a \in G$ (Isnarto, 2008).

Contoh 2.2.1 :

$(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup abelian. $H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$. Koset yang terbentuk dari H adalah :

$\overline{0} + H = \overline{2} + H = \overline{4} + H = H = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$

$\overline{1} + H = \overline{3} + H = \overline{5} + H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$

Karena $\mathbb{Z}_6$ merupakan grup abelian, maka koset kanan sama dengan koset kiri.

2.3 Teorema Lagrange

Jika *G* sebarang grup berhingga dan *H* subgrup dari *G* maka orde *H* membagi orde *G* (Isnarto, 2008).

Bukti :

Misal H subgrup dari G maka setiap koset kiri dan koset kanan dari H mempunyai elemen yang sama banyak dengan H.

Misal $|G| = n$ dan $|H| = m$.

Karena G berhingga maka terdapat sejumlah berhingga koset kiri dari H dinamakan $g_1H, g_2H, \dots, g_rH$.

Sedemikian sehingga $|g_1H| = |g_2H| = \cdots = |g_rH| = m$

Karena g_iH membentuk partisi pada G, maka :

$|g_1H| + |g_2H| + \cdots + |g_rH| = n$

$m + m + \cdots + m = n$

$rm = n$

Jadi, $m \mid n$.

Terdapatnya kaitan antara order dari suatu grup dengan order dari suatu subgrup seperti yang dinyatakan dalam Teorema Lagrange memotivasi lahirnya sifat berikut.

a.) Setiap grup berorde prima merupakan grup siklik

Bukti :

Misalkan G grup dengan elemen identitas e dan $|G| = p$ dengan p prima.

Karena p prima, maka $p \geq 2$.

Akibatnya G memuat elemen a dengan $a \neq e$.

Selanjutnya dibentuk $\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$

Maka $\langle a \rangle$ merupakan subgrup dari G.

Karena $e, a \in \langle a \rangle$ maka $|\langle a \rangle| \geq 2$.

Misal $|\langle a \rangle| = q$

Berdasarkan Teorema Lagrange diperoleh $q|p$.

Karena $q \geq 2$ dan p prima, maka $q = p$.

Jadi $\langle a \rangle = G$ danterbukti bahwa G merupakan grup siklik.

b.) Order suatu elemen dalam grup berhingga habis membagi order grup tersebut.

Pada bagian pertama telah diberikan teori tentang grup yang salah satunya mengkaji tentang sifat dari homomorfisma grup yaitu injektif, surjektif, dan bijektif. Homomorfisma grup yang bijektif memotivasi lahirnya teori autokomutator dan A-sempurna yang akan dijelaskan pada bagian kedua.

2.4 Autokomutator dan Grup A-Sempurna

Misalkan G suatu grup dan $A = Aut\ (G)$ automorfisma pada G. Jika $g\ \in G$ dan $\alpha \epsilon A$, maka $[g, \alpha] = g^{-1}\alpha(g)$ disebut autokomutator pada g dan α. Berdasarkan notasi tersebut, maka dapat didefinisikan himpunan semua autokomutator pada G adalah

$$K\ (G) = [G, A] = \{[g, \alpha] | g \epsilon G, \alpha \epsilon A\}$$

yang merupakan subgrup dari G (Chis, 2008).

Contoh 2.4.1

Diberikan grup $\mathbb{Z}_2$ dengan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan didefinisikan fungsi $\alpha : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ dengan $\alpha(a) = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_2$, maka autokomutator subgrup dari $\mathbb{Z}_2$ adalah $K(\mathbb{Z}_2) = \{(0^{-1}\alpha(0)), (1^{-1}\alpha(1)), \} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

Karena $K(G)$ merupakan himpunan bagian dari G atau dituliskan dengan $K(G) \subseteq G$, maka autokomutator subgrup tersebut berasal dari subgrup G. Tetapi jika grup G sama dengan himpunan bagiannya yaitu $K(G)$ atau dituliskan dengan $G = K(G)$, maka grup tersebut diberi nama khusus yaitu grup A-sempurna (Nasrabadi, 2012).

Contoh 2.4.2

Diberikan grup $\mathbb{Z}_3$ dengan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ dan didefinisikan fungsi $\alpha : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ dengan $\alpha(a) = a^{-1}$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$, maka autokomutator subgrup dari $\mathbb{Z}_3$ adalah

$$K(\mathbb{Z}_3) = \{(0^{-1}\alpha(0)), (1^{-1}\alpha(1)), (2^{-1}\alpha(2))\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \mathbb{Z}_3$$

sedemikian sehingga $\mathbb{Z}_3$ merupakan grup A-sempurna.