II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan teori grup dan teori ring yang akan digunakan dalam penelitian. Pada bagian pertama akan dibahas mengenai teori grup.

2.1 Grup

Dalam struktur aljabar, himpunan adalah suatu kumpulan obyek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek dalam himpunan tersebut dinamakan anggota himpunan. Suatu himpunan dapat diberikan suatu operasi biner $*$ yaitu suatu operasi yang bersifat *well defined* dan tertutup.

Berikut adalah definisi dari operasi biner

Sebuah operasi biner pada sebuah himpunan G adalah sebuah fungsi

$$* : G \times G \to G$$

$*(x, y)$ dalam G memetakan pasangan berurut (x, y) elemen di G. Agar lebih umum, dapat dituliskan $x * y$ menggantikan $*(x, y)$. Berikut adalah komposisi fungsi $(f, g) \to g \circ f$, pada perkalian, penjumlahan, dan pengurangan berturut-turut yaitu $(x, y) \to xy$, $(x, y) \to x + y$, $(x, y) \to x - y$. Contoh komposisi dan pengurangan menunjukkan pasangan berurut untuk $x * y$ dan $y * x$ mungkin berbeda. Untuk setiap fungsi, sebuah operasi harus memiliki nilai yang tunggal yaitu jika $x = x'$ dan $y = y'$ maka $x * y = x' * y'$ (Joseph , 2003).

Sebagai contoh jika $a, b \in Z$ maka $a + b \in Z$. Jadi $a * b = a + b$ adalah operasi biner dengan Z adalah himpunan bilangan bulat. Kemudian didefinisikan suatu himpunan yang diberikan suatu operasi biner $*$ yang memenuhi beberapa aksioma yaitu Grup.

Diberikan himpunan G dan operasi biner $*$. G disebut grup yang dinotasikan dengan $(G,*)$ jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$ ($*$ bersifat assosiatif);

(ii) Terdapat elemen e di G, yang disebut identitas di G, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$;

(iii) Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, elemen a^{-1} disebut invers dari a (Dummit and Foote, 2004).

Contoh :

1. $M_n(R)$ adalah suatu himpunan matriks berukuran nxn yang semua entri-entrinya adalah bilangan real. $M_n(R)$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan dengan 0_n adalah elemen identitas di $M_n(R)$ dan untuk matriks $A \in M_n(R)$ maka $-A \in M_n(R)$ adalah invers dari A.
2. $M_n(R) = \{(a_{ij})_{nxn} | a_{ij} \in R, det(a_{ij}) \neq 0\}$ membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.
3. Himpunan bilangan bulat Z merupakan grup terhadap operasi $+$.
4. Z_n yang didefinisikan sebagai himpunan bilangan bulat modulo n merupakan grup terhadap operasi penjumlahan modulo n.

Sebagai informasi Euler, Gauss, Lagrange, Abel, dan Galois merupakan peneliti awal dalam bidang teori grup.

Pada bagian pertama telah dijelaskan mengenai teori grup, selanjutnya pada bagian kedua akan dijelaskan mengenai teori ring.

2.2 Ring

Teori ring merupakan kajian lanjutan dari teori grup. Grup hanya diberikan satu operasi biner sedangkan pada ring diberikan dua operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Kedua operasi tersebut sering dilambangkan dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\times)$. Perlu ditekankan di sini bahwa operasi penjumlahan dan pergandaan dalam ring berbeda dengan operasi penjumlahan dan pergandaan dalam bilangan real. Ring R sering ditulis dengan $(R,+,\times)$. Beberapa ilmuan yang turut dalam mengembangkan teori ring yaitu William Rowan Hamilton, Emmy Noether, W. Schmeidler. Berikut adalah definisi dari ring.

Ring R adalah himpunan dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$ (Penjumlahan dan perkalian) yang memenuhi aksioma berikut:

i) $(R,\times)$ adalah grup abel,

ii) $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$ untuk setiap $\mathrm{a,b,c} \in \mathrm{R}$,

$(a+b)\times c = (a\times c)+(b\times c)$ dan $a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)$ untuk setiap $\mathrm{a,b,c} \in \mathrm{R}$ (Dummit and Foote, 2004).

Contoh :

1. Z, Q, R dan C merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan.
2. Dapat dibuktikan bahwa himpunan A yang terdiri dari 2 elemen yaitu $\{0, a\}$ dengan operasi yang didefinisikan dengan

   $0 + 0 = a + a = 0$

   $0 + a = a + 0 = a$

   $0.0 = 0. a = a. 0 = 0$

   $a. a = a$

   merupakan ring. Sebagai contoh nyata $Z_2 = \{0,1\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan modulo 2 merupakan himpunan yang mempunyai sifat tersebut.
3. Misal X suatu himpunan dan $P(X) = \{ A \mid A \subset X \}$. Didefinisikan operasi ∇ dan $\cap$ pada $P(X)$ dengan ketentuan sebagai berikut:

   (i). $A \nabla B = (A - B) \cup (B - A)$, dan

   (ii).$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A$ dan $x \in B\}$.

   $P(X)$ terhadap kedua operasi tersebut merupakan ring.

Pada suatu ring terdapat elemen yang mempunyai sifat-sifat tertentu. Berikut adalah definisi dari beberapa elemen berdasarkan sifatnya.

Elemen $x \in R$ dikatakan elemen nilpotent jika $x^m = 0$ untuk beberapa $m \in Z^+$. (Lam, 1991).

Contoh :

Misalkan $M_2(R)$ adalah suatu himpunan matriks berukuran 2×2 yang semua entrinya adalah bilangan real. Salah satu contoh elemen nilpoten dari $M_2(R)$ yaitu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Elemen $a \in R$ dikatakan elemen idempoten jika $a^2 = a$ (Lam, 1991).

Contoh :

Z_2 memiliki elemen idempoten 0 dan 1.

Dalam teori grup dikenal grup normal dan analog dengan grup normal, dalam teori ring didefinisikan ideal dalam suatu ring. Ideal pertama kali diusulkan oleh Richard Dedekind pada tahun 1876. Ideal lebih khusus dari subring. Ideal memenuhi aksioma subring dan dilengkapi dengan beberapa aksioma. Berikut adalah definisi dari ideal.

Misalkan I adalah himpunan bagian (subset) dari ring R, dan pertimbangkan tiga sifat berikut:

1. I adalah subgrup dari $(R, +)$,
2. Jika $a \in I$ dan $r \in R$ maka $ar \in I$, ekuivalen dengan $Ir \subseteq I$ untuk setiap $r \in R$,
3. Jika $a \in I$ dan $r \in R$ maka $ra \in I$, ekuivalen dengan $rI \subseteq I$ untuk setiap $r \in R$.

Jika (1) dan (2) dipenuhi, maka I adalah ideal kiri dari R. Jika (1) dan (3) dipenuhi, maka I adalah ideal kanan dari R. Jika ketiga sifat tersebut dipenuhi, maka I adalah ideal dari R, I ideal sejati jika $I \neq R$, I ideal nontrivial jika terdapat ideal selain R dan $\{0\}$ (Ash,2000).

Untuk semua ideal I di R, dapat dibentuk ring kuosen $\bar{R} = R/I$, $a \in R$ maka $a + I \in R/I$. Ideal P di ring R dikatakan ideal prima jika $P \neq R$ dan untuk semua ideal $A, B \subseteq R$ dan $A, B \subseteq P$ mengakibatkan $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$.
Ideal $I \subset R$ dikatakan ideal maksimal dari R jika tidak terdapat ideal dari R diantara I dan R (Lam, 1991).

Contoh :

1. nZ merupakan ideal dari Z. Untuk $n = 2$ diperoleh $2Z = 2(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots) = \langle 2 \rangle$, dengan $\langle 2 \rangle = \{2k | k \in Z\}$.
2. Diketahui Z_6 merupakan ring komutatif dengan elemen satuan terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan modulo 6. Dibentuk $\langle 2 \rangle = \{ a.2 \mid a \in Z6 \} = \{ 0, 2, 4\}$ dan berdasarkan definisi tersebut di atas $\langle 2 \rangle$ merupakan ideal dalam Z_6. Ideal-ideal lain dalam Z_6 adalah $\langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = Z_6$ dan ideal yang dibentuk oleh 3 yaitu $\langle 3 \rangle = \{ 0, 3 \}$.

Dalam teori ring, ring faktor juga dikenal sebagai ring kuosen yang mirip dengan grup faktor dari teori grup dan ruang hasil bagi dalam aljabar linear. Suatu ideal I dari R dapat dibentuk suatu ring R/I atau R modulo I dengan definisi sebagai berikut:

Diketahui A ring dan I sebarang ideal dalam A. Sistem aljabar A/I didefinisikan sebagai berikut :

(i) $A/I = \{a + I \mid a \in A\}$

(ii) Operasi penjumlahan dalam A/I didefinisikan sebagai $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ dan operasi pergandaan dalam A/I didefinisikan sebagai $(a + I)(b + I) = (ab) + I$ (Dummit and Foote, 2004).

Contoh :

1. $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in R\right\}$ merupakan ideal dari $M_2(R)$.
2. Himpunan $Z_{10} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan modulo 10.

   Ideal-ideal dalam Z_{10} adalah

   $\langle 0 \rangle = \{0\}$

   $\langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 9 \rangle = Z_{10}$,

   $\langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle = \langle 6 \rangle = \langle 8 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

   dan $\langle 5 \rangle = \{0, 5\}$.

   Ideal $I = \langle 2 \rangle$ merupakan ideal maksimal sehingga terbentuk ring kuosen $Z_{10}/I = \{I, 1 + I\}$.

   Jika diambil ideal $J = \langle 5 \rangle$ maka ring kuosen yang terbentuk adalah $Z10/J = \{J, 1 + J, 2 + J, 3 + J, 4 + J\}$.

Sedangkan irisan dari semua ideal kiri maksimal dari ring R disebut Radical Jacobson atau dinotasikan dengan rad R. Jika $R \neq 0$, menurut lemma Zorn ideal kiri maksimal selalu ada. Jika $R = 0$ maka tidak terdapat ideal kiri maksimal (ekuivalen dengan radikal adalah irisan dari semua ideal kanan maksimal dari R. Jika $R \neq 0$, menurut lemma Zorn ideal kanan maksimal selalu ada. Jika $R = 0$ maka tidak terdapat ideal kanan maksimal). Pada kasus ini, kita definisikan radical jacobson sama dengan nol (Lam, 1991).

Contoh :

1. Ideal maksimal di Z adalah pZ untuk p adalah bilangan prima. $Rad(Z)$ yaitu $\{0\}$.
2. Suatu ring faktor $Z/12Z$ memiliki ideal maksimal $2Z/12Z$ dan $3Z/12Z$. Jadi $rad(R) = 6Z/12Z$.

Pada bab selanjutnya akan digunakan lemma Zorn untuk membuktikan bahwa setiap ring tak nol memiliki suatu ideal maksimal. Berikut adalah lemma Zorn:

Lemma 2. 1 (Lemma Zorn)

Misalkan S adalah himpunan berurut parsial. Jika setiap himpunan bagian berurut total dari S mempunyai sebuah batas atas, maka S memuat sebuah elemen maksimal (Lam, 1991).

Untuk mengetahui teorema ini, kita membutuhkan untuk mengetahui empat bentuk,yaitu himpunan berurut parsial (*partially ordered set*), himpunan berurut total (*totally ordered subset*), batas atas (*upper bound*), dan elemen maksimal (*maximal element*). Sebuah himpunan berurut parsial pada himpunan S adalah relasi biner pada S, dinotasikan $\leq$ yang memenuhi sifat berikut:

i) Untuk semua $s \in S, s \leq s,$

ii) Jika $s \leq s'$ dan $s' \leq s$ maka $s = s'$,

iii) Jika $s \leq s'$ dan $s' \leq s"$ maka $s = s"$.

Dengan menetapkan order parsial (*partial ordering*) $\leq$ pada S, ekuivalen dengan menunjukkan S sebagai himpunan berurut parsial.

Itu penting untuk diperhatikan bahwa tidak dapat mengasumsikan semua pasangan dari elemen di S yang komparabel dibawah $\leq$. Jika semua pasangan elemen komparabel (yaitu untuk setiap s dan s' dalam S memenuhi salah satu $s \leq s'$ atau $s' \leq s$) maka kita dapat mengatakan S adalah order total (*totally ordered*) yang respek dengan $\leq$.

Contoh :

1. Z, R, Q adalah order total yang respek dengan $\leq$, dan semuanya tidak mempunyai elemen maksimal.
2. Dalam himpunan dari himpunan bagian pada grup G, digambarkan himpunan bagian atau subgroup H dan K yang memenuhi $H \leq K$ jika $K \subset H$. Ini adalah order parsial dari subgrup G.

Dalam matematika, elemen yang memiliki invers terhadap perkalian disebut dengan elemen invertibel atau elemen unit. Ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan

1. $u \in R$ dinamakan unit apabila terdapat $v \in R$ sehingga $uv = vu = 1$. Dengan kata lain, u dinamakan unit apabila $u|1$ (Dummit and Foote, 2004).

Contoh :

1. Hanya -1 dan 1 anggota dalam Z yang merupakan unit karena $-1.(-1) = 1$ dan $1.1 = 1$. Dengan kata lain -1 dan 1 mempunyai invers yaitu dirinya sendiri.
2. Dalam ring $(Z_8, +, \cdot)$ berlaku $1.1 = 1$, $3.3 = 1$ dan $5.5 = 1$. Jadi 1,3 dan 5 merupakan unit di Z_8.

Pada grup, tidak semua grup elemen tak nolnya merupakan unit. Salah satunya adalah $Z_n$untuk n bukan bilangan prima. Sedangkan ring dapat dibentuk menjadi suatu grup dengan semua elemen ring R adalah unit. Berikut didefinisikan suatu himpunan dengan operasi biner $*$ yang semua elemennya adalah unit, dan himpunan tersebut merupakan sebuah grup terhadap operasi $*$.

R adalah sebuah ring. $U(R)$ adalah grup dari semua elemen ring R yang merupakan unit, didefinisikan sebagai berikut $U(R) = \{x|xy = 1; y \in R\}$ (Lam, 1991).

Contoh :

Ring $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. Diperoleh $1.1 = 1$ dan $5.5 = 1$ maka 1 dan 5 adalah unit di Z_6. Jadi $U(Z_6) = \{1,5\}$.

Ring juga dapat dibentuk menjadi ring opposite. Opposite dari suatu ring itu sendiri adalah ring lain yang elemennya sama dengan operasi penjumlahan, tetapi dalam operasi perkalian dilakukan dengan urutan terbalik. Berikut adalah definisi dari ring opposite.

R adalah sebuah ring. R^{op} adalah ring opposite dari ring R. R^{op} mengandung semua elemen dengan bentuk a^{op} yang berkorespondensi satu-satu dengan elemen $a \in R$. Dengan operasi perkaliannya didefinisikan dengan $a^{op}.b^{op} = (ba)^{op}$ dengan $a, b \in R$ (Lam, 1991).

Contoh :

R adalah ring divisi, maka $R^{op} = R$.

Bukti.

Akan dibuktikan dengan kontradiksi pemetaan. Didefinisikan sebuah fungsi Op : $R \to R$ dengan $a \longmapsto a^{-1}$ sehingga $a^{op} = a^{-1}$

Jelas pemetaan ini bijektif.

Ambil sebarang $a, b \in R$, sehingga $(ab)^{op} = (ab)^{-1} = b^{-1}.a^{-1} = b^{op}.a^{op}$

Terbukti bahwa $R^{op} = R$. ∎

Seperti halnya grup, Ring R juga dapat dibentuk Dedekind Berhingga yaitu himpunan dengan jumlah elemennya terbatas. Berikut adalah definisi dari Dedekind berhingga.

Ring R dikatakan Dedekind berhingga jika $ab = 1$ maka $ba = 1$. Jadi ada ring dengan elemen invertibel kanan yang mengakibatkan invertibel kiri. R merupakan

Dedekind berhingga jika $a \in R$ mempunyai invers kiri maka $a \in u(R)$ (Tam, 1991).

Contoh :

Ring R dikatakan revesibel jika $a, b \in R, ab = 0$ maka $ba = 0$. Ring R yang revesibel adalah Dedekind-berhingga.

Bukti.

Andaikan bahwa $ab = 1$ dengan $a, b \in R$. Maka $(ba - 1)b = b(ab) - b = 0$ jadi $(ba - 1)b = 0$.

$b^2a = b \implies ab^2a = ab = 1.$

$ba = (ab^2a)ba = (ab^2)(ab)a = ab^2a = 1$. Jadi R terbukti Dedekind berhingga. Jelas R Dedekind berhingga karena jika $ab = 0\ maka\ (ba)^2 = b(ab)a = 0$ sehingga $ba = 0$. ■

Selanjutnya ring dengan setiap elemen tak nol yang merupakan unit disebut ring divisi. Pada ring komutatif, ring divisi adalah lapangan. Berikut adalah definisi dari ring divisi.

R adalah ring divisi jika untuk setiap $a \in R\backslash(0)$ mempunyai invers atau R ring divisi jika $R \neq 0$ dan $U(R) = R\backslash\{0\}$ (Lam, 1991).

Contoh :

1. $Z_p$dengan p bilangan prima adalah ring divisi.

2. $M_n(R) = \{(a_{ij})_{nxn} | a_{ij} \in R, det(a_{ij}) \neq 0\}$ merupakan ring divisi.

2.3 Modul

Pada bagian ini akan dibahas mengenai modul atas ring R. Berikut diberikan definisinya.

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan M grup Abel, dengan operasi pergandaan skalar

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

M disebut modul atas ring R jika M merupakan modul kiri dan kanan.

(i) M disebut modul kiri atas ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini :

a) $a(m + n) = am + an$;

b) $(a + b)m = am + bm$;

c) $(ab)m = a(bm)$;

d) $1m = m$.

(ii) M disebut modul kanan atas ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini :

a) $(m + n)a = ma + na$;

b) $m(a + b) = ma + mb$;

c) $m(ab) = (ma)b$;

d) $m1 = m$ (Adkinds and Weintraub, 1992).

Contoh :

1. Diberikan ring $\mathbb{R}$ dan grup Abel $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut

$$\mathbb{R}^n = \{(x_{1,}x_{2,} \dots, x_n) \mid x_{1,}x_{2,} \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring R terhadap operasi pergandaan skalar.

Untuk memperlihatkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring $\mathbb{R}$ haruslah $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri dan modul kanan.

1. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas ring R. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut :

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dengan $a \cdot (x_{1,}x_{2,} \dots, x_n) = (a \cdot x_{1,} a \cdot x_{2,} \dots, a \cdot x_n)$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}, (x_{1,}x_{2,} \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

i. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
a(\bar{x} + \bar{y}) &= a\big((x_{1,}x_{2,} \dots, x_n) + (y_{1,}y_{2,} \dots, y_n)\big) \\
&= a\,(x_1 + y_{1,} x_2 + y_{2,} \dots, x_n + y_n) \\
&= (a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), \dots, a(x_n + y_n)) \\
&= ((ax_1 + ay_1), (ax_2 + ay_2), \dots, (ax_n + ay_n)) \\
&= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) + (ay_1, ay_2, \dots, ay_n) \\
&= a(x_{1,}x_{2,} \dots, x_n) + a(y_{1,}y_{2,} \dots, y_n) \\
&= a\bar{x} + a\bar{y}
\end{aligned}$$

Jadi $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

ii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$(a_1 + a_2)(\bar{x}) = (a_1 + a_2)(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)$

$= ((a_1 + a_2)x_{1,} (a_1 + a_2)x_{2,} \dots, (a_1 + a_2)x_n)$

$= (a_1x_1 + a_2x_1, a_1x_2 + a_2x_2, \dots, a_1x_n + a_2x_n)$

$= (a_1x_1, a_1x_2, \dots, a_1x_n) + (a_2x_1, a_2x_2, \dots, a_2x_n)$

$= a_1(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n) + a_2 (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)$

$= a_1(\bar{x}) + a_2(\bar{x})$

Jadi $(a_1 + a_2)(\bar{x}) = a_1(\bar{x}) + a_2(\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$(a_1a_2)(\bar{x}) = (a_1a_2)(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)$

$= (a_1a_2)(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)$

$= ((a_1a_2)x_1, (a_1a_2)x_2, \dots, (a_1a_2)x_n)$

$= (a_1a_2x_1, a_1a_2x_2, \dots, a_1a_2x_n)$

$= a_1 (a_2x_1, a_2x_2, \dots, a_2x_n)$

$= (a_1)(a_2\bar{x})$

Jadi $(a_1a_2)(\bar{x}) = (a_1)(a_2\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iv. Diberikan sebarang $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$1(\bar{x}) = 1(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)$

$= (1x_{1,} 1x_{2,} \dots, 1x_n)$

$= (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)$

$$= \bar{x}$$

Jadi $1(\bar{x}) = \bar{x}$, untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i – iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{R}$. ■

Seperti halnya grup yang mempunyai grup bagian (*subgroup*) dan ring yang mempunyai ring bagian (*subring*), demikian juga modul mempunyai modul bagian (*submodule*). Berikut adalah definisi dari modul sederhana (*simple*) yang berkaitan dengan modul bagiaannya.

Misalkan R ring, dan M adalah R-modul kiri. M dikatakan R-modul simpel atau sederhana jika $M \neq 0$, dan M tidak mempunyai R-submodul selain 0 dan M. (Lam, 1991).

Contoh:

Misalkan R adalah ring divisi maka R adalah modul sederhana atas dirinya sendiri.