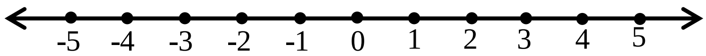
# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Bilangan Bulat

Bilangan Bulat merupakan bilangan yang terdiri dari bilangan cacah dan negatifnya. Yang termasuk dalam bilangan cacah yaitu 0,1,2,3,4,… sehingga negatif dari bilangan cacah yaitu -1,-2,-3,-4,… Himpunan semua bilangan bulat dilambangkan dengan Z atau Ƶ. Himpunan Z tertutup terhadap operasi penjumlahan, operasi pengurangan dan operasi perkalian.




Berdasarkan garis bilangan diatas, bilangan bulat positif terletak disebelah kanan nol atau disebut dengan bilangan asli sedangkan untuk bilangan bulat negatif terletak disebelah kiri nol.

Sifat-sifat operasi bilangan bulat :

(i) (Asosiatif)

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(ii) (Komutatif)

$a + b = b + a$

$a \times b = b \times a$

(iii) (Unsur Identitas)

$$a + 0 = a$$

$$a \times 1 = a$$

(iv) (Distributif)

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

(v) (Invers)

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{(Riyanto, 2008)}$$

## 2.2 Barisan

Dalam bahasa sederhana, barisan ($a_{1,} a_{2,} a_3, \ldots$) adalah susunan bilangan-bilangan real yang teratur, satu untuk bilangan bulat positif. Lebih tepatnya, barisan tak terhingga (Infinite Sequence) adalah fungsi yang daerah asal (domain)-nya adalah himpunan bilangan bulat positif dan daerah hasil (range)-nya adalah himpunan bilangan real. Sebuah barisan $a_{1,} a_{2,} a_3, \ldots$ dapat dinotasikan dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau sederhana dengan $\{a_n\}$. Kadangkala, kita juga dapat sedikit diperluas batasan tersebut dengan membuat daerah asalnya terdiri dari seluruh bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan bilangan bulat tertentu, seperti $b_0 b_{1,} b_2, \ldots$ dan $c_8, c_{9,} c_{10}, \ldots$ yang masing masing dilambangkan dengan $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dan $\{c_n\}_{n=8}^{\infty}$

Sebuah barisan dapat ditentukan dengan memberikan suku awal yang cukup untuk membentuk sebuah pola, seperti pada

$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots$$

Dengan rumus eksplisitnya untuk suku ke-n yaitu $a_n = 3n - 2\ ;\ n \geq 1$. (Purcell, 2002).

### 2.2.1 Barisan Fibonacci

Barisan Fibonacci diambil dari nama Leonardo of Pisa yang dikenal sebagai Fibonacci.

**Definisi 2.2.1**

Barisan Fibonacci adalah relasi rekurensi linear homogen orde 2 berikut :

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

Barisan Fibonacci dituliskan sebagai berikut :

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots\}$$

### 2.2.2 Barisan Lucas

Barisan Lucas adalah perumuman khusus dari barisan Fibonacci. Didefinisikan dengan :

$$L_n = \begin{cases} 2 & ; n = 0 \\ 1 & ; n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2} & ; n > 1 \end{cases}$$

Barisan Lucas dituliskan sebagai berikut

$$\{2,1,3,4,7,\ldots\}$$

Barisan Lucas jika dikaitkan dengan barisan Fibonacci dituliskan :

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1} = F_{n+2} - F_{n-2}$$

### 2.2.3 Barisan Catalan

Suku ke-n Barisan catalan didefinisikan dengan :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Barisan Catalan dituliskan sebagai berikut :

$$\{1,2,6,20,\dots\}$$

### 2.2.4 Fungsi Pembangkit

**Definisi 2.2.4**

Fungsi pembangkit untuk sebuah barisan tak hingga :

$$a_0, a_1, a_3, a_4, a_5, \dots$$

Adalah

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

**Contoh 2.2.4**

$$1,1,1,1,1,1,\dots \rightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

**Contoh 2.2.5**

$$\begin{aligned} 1,2,4,8,16,32,64,\dots \rightarrow\ & 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots \\ &= 1 + (2z) + (2z)^2 + (2z)^3 + (2z)^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{1-(2z)} = \frac{1}{1-2z} \end{aligned}$$

## 2.3 Sigma

Digunakan untuk menyatakan penjumlahan berurutan dari suatu bilangan. Simbol Σ merupakan huruf kapital “S” dalam abjad Yunani dan juga huruf pertama dari kata SUM yang berarti jumlah.

Bentuk umum notasi sigma :

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

Berikut contohnya :

$$\sum_{i=1}^{50} 2i = 2.1 + 2.2 + 2.3 + \cdots + 2.50 = 2 + 4 + 6 + \cdots + 100$$

Sifat notasi sigma :

1. $\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$
2. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{k=1}^{n} U_k$
3. $\sum_{i=1}^{n} K = nK$; dimana K adalah konstanta
4. $\sum_{i=1}^{n} KU_i = K \sum_{i=1}^{n} U_i$
5. $\sum_{i=1}^{n} (U_i \pm V_i) = \sum_{i=1}^{n} U_i \pm \sum_{i=1}^{n} V_i$
6. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=0}^{n-1} U_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} U_{i-1}$
7. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{m} U_i + \sum_{i=m+1}^{n} U_1$ ; dimana 1 < m < n
8. $\sum_{i=m}^{n} U_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} U_{i-p} = \sum_{i=m-p}^{n-p} U_{i+p}$
9. a. $\sum_{i=1}^{n} (U_i + V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} U_i V_i + \sum_{i=1}^{n} V_i^2$

   b. $\sum_{i=1}^{n} (U_i - V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} U_i V_i + \sum_{i=1}^{n} V_i^2$

   (Purcell, 2002)

## 2.4 Matriks

Matriks merupakan suatu susunan angka berbentuk segiempat. Bilangan Bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks. Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horisontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalkan pada contoh matriks dibawah ini, matriks pertama mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (ditulis $3 \times 2$). Dalam suatu uraian ukuran, angka pertama selalu menyatakan jumlah baris dan angka kedua menyatakan jumlah kolom. Matriks matriks lainnya pada contoh dibawah ini masing masing mempunyai ukuran $1 \times 4, 3 \times 3, 2 \times 1,$ dan $1 \times 1$. Sebuah matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom, dan sebuah matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris.

**Contoh 2.4.1**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Untuk menyatakan matriks, biasanya dengan menggunakan huruf besar, dan huruf kecil untuk menyatakan bilangan.

**Contoh 2.4.2**

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ atau C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Anggota pada baris i dan kolom j dari sebuah matriks A akan dinyatakan sebagai $a_{ij}$. Jadi sebuah matriks umum $3 \times 4$ dapat ditulis sebagai

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

dan sebuah matriks umum$m \times n$ ditulis sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{m}_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \ldots & m_{mn} \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks bujur sangkar berorde n, dan anggota anggota $m_{11}$, $m_{22}$, ... $m_{nn}$ disebut sebagai diagonal utama. (bisa dilihat pada matriks A diatas). (Anton, 2000)

### 2.5 Operasi Operasi Matriks

**Definisi 2.5.1**

Dua matriks didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan anggota naggotanya yang berpadanan sama.

Dalam notasi matriks, jika A=$[a_{ij}]$ dan B=$[b_{ij}]$ mempunyai ukuran yang sama maka A=B jika dan hanya jika $(A)_{ij}=(B)_{ij}$.

**Contoh 2.5.2**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika x = 5, maka A = B, tidak ada nilai x yang membuat A = C karena A dan C adalah matriks dengan ukuran yang berbeda.

**Definisi 2.5.3**

Jika A dan B adalah matriks matriks berukuran sama, maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota anggota B dengan anggota anggota A yang berpadanan, dan selisih A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota anggota A dengan anggota-anggota B yang berpadanan. Matriks Mtriks berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan.

**Contoh 2.5.4**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Ungkapan A+C, B+C, A-C, dan B-C tidak terdefinisi.

**Definisi 2.5.5**

Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan c.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

**Contoh 2.5.6**

Untuk matriks matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Kita mendapatkan

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad (-1)\,B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Adalah umum menyatakan $(-1)B$ dengan $-B$.

**Definisi 2.5.7**

Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang anggota anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris $i$ dan kolom $j$ dari AB, pilih baris $i$ dari matriks A dan kolom secara bersama – sama dan kemudian jumlah hasilnya sama. (Anton, 2000)

## 2.6 Sifat-sifat Operasi Matriks

Pada bagian ini akan dibahas beberapa sifat operasi aritmatika pada matriks. Kita akan melihat bahwa banyak aturan dasar aritmatika untuk bilangan bilangan yang berlaku untuk matriks tetapi ada beberapa yang tidak.

**Teorema 2.6.1**

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks matriks dibawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang bisa ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan aturannya adalah berikut ini :

a. $A + B = B + A$ (hukum komutatif untuk penjumlahan)

b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

c. $A(BC) = (AB)C$ (hukum asosiatif untuk perkalian)

d. $A(B + C) = AB + AC$ (hukum distributif kiri)

e. $(B + C)A = BA + CA$ (hukum distributif kanan)

f. $A(B - C) = AB - AC$

g. $(B - C)A = BA - CA$

h. $a(B + C) = aB + aC$

i. $a(B - C) = aB - aC$

j. $(a + b)C = aC + bC$

k. $(a - b)C = aC - bC$

l. $a(bC) = (ab)C$

m. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ (Anton, 2000)

## 2.7 Grup

**Definisi 2.7.1**

Diberikan himpunan $G$ dan operasi biner $*$. $G$ disebut grup yang dinotasikan dengan $(G,*)$ jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$ (* bersifat assosiatif)

(ii) Terdapat elemen $e$ di $G$, yang disebut identitas di $G$, sedemikan sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$;

(iii) Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, elemen $a^{-1}$ disebut invers dari $a$ (Dummit and Foote, 2004)

Untuk lebih memahami definisi grup, berikut diberikan contohnya.

**Contoh 2.7.1**

Diberikan $n$ bilangan bulat positif dan $nZ = \{nm \mid m \in Z\}$. Akan ditunjukkan bahwa $< nZ, + >$ merupakan grup.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $nZ$ bersifat tertutup terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $, y \in nZ$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2, \in Z.$

$x + y = nm_1 + nm_2$

$= n(m_1 + m_2) \quad \in n\mathbb{Z}$

Jadi, $n\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi +.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa $nZ$ bersifat tertutup terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $x, y \in nZ$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ dan $w = nm_3$ untuk suatu $m_1, m_2, m_3 \in Z$, sehingga :

$$x + (y + w) = nm_1 + (nm_2 + nm_3)$$
$$= nm_1 + n(m_2 + m_3)$$
$$= n(m_1 + (m_2 + m_3))$$
$$= n(m_1 + m_2) + m_3)$$
$$= n(m_1 + m_2) + m_3)$$
$$= (nm_1 + nm_2) + nm_3$$
$$= (x + y) + w$$

Jadi, terbukti bahwa elemen di nZ bersifat assosiatif terhadap operasi +.

(iii) Akan ditunjukkan setiap elemen di $n\mathbb{Z}$ memiliki elemen identitas.

Untuk setiap $nm \epsilon nZ$, terdapat $0 \epsilon nZ$ sehingga untuk suatu $m \epsilon Z$ $nm + 0 = 0 + nm = nm$.

Jadi, elemen identitas pada $nZ$ yaitu 0.

(iv) Akan ditunjukkan setiap elemen di $nZ$ memiliki invers.

Diberikan sebarang $x \epsilon nZ$ dengan $x = nm$, akan ditentukan invers dari $x$ sebagai berikut :

$x + y = 0$ (dengan $y$ adalah invers dari $x$)

$nm + y = 0$

$y = 0 + (-nm)$

$y = -(nm)$

$y = n(-m) \epsilon nZ$

Jadi, invers dari $nm$ adalah $n(-m)$. Hal ini berakibat bahwa setiap elemen di $nZ$ memiliki invers.

Berdasarkan (i)-(iv) terbuktu bahwa $nZ$ merupakan grup. (Fraleigh, 2000)

## 2.8 Riordan Matriks

**Definisi 2.8.1**

Suatu elemen $R \in \mathcal{R}$ adalah matriks tak hingga segitiga bawah dimana kolom ke k nya memiliki fungsi pembangkit $g(z)f^k(z)$, dimana $k = 0, 1, 2, \ldots$ dan g(z), f(z) adalah fungsi pembangkit dengan $g(0) = 1, f(0) = 0$ atau dapat dituliskan sebagai:

$$R = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ g(z) & g(z)f(z) & g(z)f^2(z) & g(z)f^3(z) & g(z)f^4(z) & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

Selanjutnya R adalah sebuah Riordan Matrix dan dituliskan $R = \big(g(z), f(z)\big)$.

**Contoh 2.8.1**

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ g(z) & g(z)f(z) & g(z)f^2(z) & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{bmatrix}$$

**Definisi 2.8.2**

Riordan Grup $R = \{(g(z), f(z)) | g(z), f(z))$ adalah Matriks Riordan dan $f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots$, dimana $f_0 = 0, f_1 = 1$, yaitu dengan anggota R adalah matriks segitiga bawah dengan diagonal utamanya adalah 1. Perkalian pada R adalah $\big(g(z), f(z)\big)\big(G(z), F(z)\big) = \Big(g(z)G\big(f(z)\big), F\big(f(z)\big)\Big)$. Identitasnya adalah $I = (1, z)$. Invers dari $(g(z), f(z))$ adalah $(\frac{1}{g(\bar{f}(z))}, \bar{f}(z))$, dimana $\bar{f}(z)$ adalah invers komposisi dari $f(z)$, yaitu $f\left(\bar{f}(z)\right) = \bar{f}\big(f(z)\big) = z$.

## 2.9 Fungsi Floor (Gaussian Function)

**Definisi 2.9.1**

Untuk sebarang bilangan real x, bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$. Selanjutnya $f(x) = \lfloor x \rfloor$ disebut fungsi Gaussian (Gaussian Function/Floor Function).

**Definisi 2.9.2**

Untuk sebarang bilangan real x, nilai x - $\lfloor x \rfloor$ dinotaskan dengan $\{x\}$, disebut bagian desimal dari x (the decimal part of x).

**Sifat-Sifat dari $\lfloor x \rfloor$ dan $\{x\}$**

- $0 \leq \{x\} < 1, dan\ \{x\} = 0$ jika dan hanya jika x adalah bilangan bulat.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}, \lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$
- $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{Jika x bukan Bilangan Bulat} \\ -\lfloor x \rfloor & \text{Jika x adalah Bilangan Bulat} \end{cases}$
- $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Pada umumnya, untuk

  $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \lfloor x_1 + x_2 \ldots + x_n \rfloor \geq \lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor + \cdots + \lfloor x_n \rfloor$.
- $\lfloor xy \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$ dimana $x, y \geq 0$. Pada umumnya, untuk $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq$

  $0, \lfloor x_1 x_2 \ldots x_n \rfloor \geq \lfloor x_1 \rfloor \cdot \lfloor x_2 \rfloor \ldots \ldots \lfloor x_n \rfloor$.
- $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor$ untuk $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$