II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Normal Umum

Menurut Herrhyanto & Gantini (2009), peubah acak X dikatakan berdistribusi normal umum, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$$

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi normal umum adalah $N(x;\ \mu, \sigma^2)$, artinya peubah acak X berdistribusi normal umum dengan rataan μ dan varians σ^2.

Peubah acak X yang berdistribusi normal dengan rataan μ dan varians σ^2 bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

2.2 Distribusi Log Normal

Menurut Kundu & Manglick (2004), Misalkan X adalah sebuah peubah acak dengan distribusi normal, maka $Y = ln(X)$ memiliki distribusi log normal $(X \sim LN(\mu, \sigma^2))$ dengan parameter μ dan σ^2; $\sigma^2 > 0$, jika dan hanya jika memiliki fungsi densitas dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$f\ (x)\ = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}\ ;\text{ untuk } x > 0$$

Fungsi densitas pada definisi di atas diperoleh dari distribusi normal dengan mentransformasikan peubah acaknya. Misalkan X dan Y adalah dua buah peubah acak dengan Y mengikuti distribusi normal. Jika $Y = ln(X)$, maka distribusi peubah acak X diperoleh dengan mentransformasikan peubah acak $Y = ln(X)$, yaitu:

$$f(x) = g(y)\left|\frac{dy}{dx}\right|$$

dengan $g(y)$ adalah fungsi densitas dari distribusi normal, yaitu :

$$g\ (y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad -\infty < y < \infty$$

dan $\left|\frac{dy}{dx}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$

Maka, fungsi densitas dari peubah acak X adalah:

$$f\ (x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} . \frac{1}{x} \qquad ;\text{ dimana } y = ln\, x$$

$$= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(ln\, x - \mu)^2}$$

Jadi, peubah acak X berdistribusi log normal $(X \sim LN(\mu, \sigma^2))$. Dengan nilai rataan dan ragam berturut-turut sebagai berikut:

$$\mu = E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \tag{2.1}$$

dan

$$\sigma^2 = Var(x) = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \tag{2.2}$$

Bukti untuk persamaan (2.1):

$$\mu = E[X] = \int_0^\infty x\,.\,f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty x\,.\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} dx \qquad (2.3)$$

Misalkan:

$z = \frac{ln\,x - \mu}{\sigma}$ $\longrightarrow$ $ln\,x = z\sigma + \mu$

$dz = \frac{1}{x\sigma}\,dx$ $\qquad x = e^{z\sigma + \mu}$

$dx = x\sigma\,dz$

Batas:

$x = 0$ $\longrightarrow$ $z = -\infty$

$x = \infty$ $\longrightarrow$ $z = \infty$

Substitusikan pemisalan tersebut ke dalam persamaan (2.3) sehingga diperoleh:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} x\sigma\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} x\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} e^{z\sigma + \mu}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2 + z\sigma + \mu}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2 + z\sigma + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2 + z\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2 + z\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2} . e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(z - \sigma^2\right)^2} . e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \, dz$$

$$= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(z - \sigma^2\right)^2} dz$$

$$= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \qquad \blacksquare$$

Jadi, terbukti bahwa nilai rataan dari distribusi log normal (μ, σ^2) adalah $\mu = E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$.

Bukti untuk persamaan (2.2):

$$\sigma^2 = Var(x) = E[X^2] - [E[X]]^2 \tag{2.4}$$

$$E[X^2] = \int_{0}^{\infty} x^2 . f(x) dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2 . \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} dx \tag{2.5}$$

Misalkan:

$z = \frac{ln\, x - \mu}{\sigma} \longrightarrow ln\, x = z\sigma + \mu$

$dz = \frac{1}{x\sigma} \, dx \qquad x = e^{z\sigma + \mu}$

$dx = x\sigma \, dz$

Batas:

$x = 0 \longrightarrow z = -\infty$

$x = \infty \longrightarrow z = \infty$

Substitusikan pemisalan tersebut ke dalam persamaan (2.5) sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} x\sigma \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} x. x \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} e^{z\sigma+\mu} \, . \, e^{z\sigma+\mu} \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} e^{2z\sigma+2\mu} \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2+2z\sigma+2\mu} \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2+2z\sigma+2\mu+2\sigma^2-2\sigma^2} \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2+2z\sigma-2\sigma^2+2\mu+2\sigma^2} \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2+2z\sigma-2\sigma^2} \, . \, e^{2\mu+2\sigma^2} \, dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-2\sigma^2)^2} . \, e^{2\mu+2\sigma^2} \, dz \\
&= e^{2\mu+2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-2\sigma^2)^2} dz \\
&= e^{2\mu+2\sigma^2} \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Substitusikan persamaan (2.1) dan (2.6) pada persamaan (2.4) sehingga diperoleh:

$$Var(x) = E[X^2] - [E[X]]^2$$

$$= e^{2\mu+\,2\sigma^2} - \left[e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\right]^2$$

$$= e^{2\mu}.\ e^{2\sigma^2} - \ e^{2\mu}.e^{\sigma^2}$$

$$= e^{2\mu}.\ e^{\sigma^2}.\ e^{\sigma^2} - \ e^{2\mu}.e^{\sigma^2}$$

$$= \left[e^{2\mu}.\ e^{\sigma^2}\right]\left[\ e^{\sigma^2} - 1\right]$$

$$= \left[e^{2\mu+\,\sigma^2}\right]\left[\ e^{\sigma^2} - 1\right] \qquad \blacksquare$$

Jadi, terbukti bahwa nilai ragam dari distribusi log normal (μ, σ^2) adalah $\sigma^2 = Var(x) = \left[e^{2\mu+\,\sigma^2}\right]\left[\ e^{\sigma^2} - 1\right]$.

2.3 Distribusi *Generalized Gamma* (GG)

Menurut Stacy (1962), suatu peubah acak *X* menyebar mengikuti distribusi GG (α,γ,m_1) dan disebut sebagai peubah acak *generalized gamma* jika dan hanya jika *X* memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$f(x; \alpha, \gamma, m_1) = \frac{\alpha}{x\Gamma(m_1)}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha m_1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha}} \qquad ; x > 0, \alpha > 0, \gamma > 0, \text{dan } \ m_1 > 0$$

2.4 Distribusi *Generalized Log-Logistic* (GLL)

Suatu peubah acak *X* berdistribusi *generalized log-logistic* dengan parameter (α, β, m_1, m_2) atau dapat dinotasikan dengan X ~ GLL (α, β, m_1, m_2). Menurut

Warsono (2000), fungsi kepekatan peluang dari distribusi GLL dengan peubah acak *X* adalah sebagai berikut:

$$g(x) = \left(\frac{\alpha}{xB(\mathrm{m_1,m_2})}\right)[F(x)]^{m_1}[1 - F(x)]^{m_2} \;\; ; \alpha \;\geq 0 \text{ dan } \beta, m_1, m_2, x > 0$$

Dengan $B(m_1, m_2) = \frac{\Gamma(m_1).\Gamma(m_2)}{\Gamma(m_1, m_2)}$ adalah fungsi beta dan $F(x) = \frac{1}{\left(1+ e^{-(\beta+\alpha \ln(x))}\right)}$ adalah fungsi distribusi *log-logistic*.

Fungsi distribusi dari GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ adalah:

$$G(x) = \frac{1}{B(m_1,m_2)} \int_o^{F(x)} w^{m_1-1}\,(1-w)^{m_2-1}\,dw$$

Diperoleh dari dengan memisalkan:

$$w = F(x) = \frac{1}{\left(1+ e^{-(\beta+\alpha \ln(x))}\right)}$$

$$dw = \left(\frac{\alpha}{x}\right)\frac{e^{-(\beta+\alpha \ln(x))}}{(1+\; e^{-(\beta+\alpha \ln(x))})^2}\,dx$$

dengan:

x = peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu mati/rusak/gagal (*failure time*).

α = parameter lokasi (*threshold*) yang menunjukkan lokasi waktu, di mana pada saat lokasi waktu tersebut, belum ada obyek pengamatan yang mati/rusak/gagal.

β = parameter skala yang menunjukkan besarnya karagaman data distribusi GLL (α, β, m_1, m_2).

(m_1, m_2) = parameter bentuk yang menujukkan laju kematian/kerusakan/kegagalan data distribusi GLL (α, β, m_1, m_2).

Untuk $m_1 = m_2 = 1$, GLL (α, β, m_1, m_2) berubah menjadi distribusi *log-logistic*.

Untuk $m_1 < m_2$, fungsi kepekatan peluang GLL (α, β, m_1, m_2) menjulur kearah positif.

Untuk $m_1 > m_2$, fungsi kepekatan peluang GLL (α, β, m_1, m_2) menjulur kearah negatif.

2.5 Ekspansi Deret Maclaurin

Misalkan f adalah suatu fungsi dengan turunan ke (n + 1), $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk setiap x pada suatu selang buka I yang mengandung a, maka untuk setiap x di I berlaku:

$$f(x) = F(a) + f'(x).(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \qquad (2.1)$$

Persamaan (2.1) di atas disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi f (x). Jika diambil a = 0 maka bentuk deret pada persamaan (2.1) di atas menjadi:

$$f(x) = f\ (0) + f'(0).(x) + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \ldots \qquad (2.2)$$

Bentuk deret pada persamaan (2.2) disebut sebagai ekspansi deret Maclaurin bagi fungsi f (x).

Dengan menggunakan persamaan (2.2) maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$$f(x) = e^{tx} \longrightarrow f(0) = e^{t(0)} = 1$$

$$f'(x) = t\ e^{tx} \longrightarrow f'(0) = t\ e^{t(0)} = t$$

$$f''(x) = t^2\, e^{tx} \longrightarrow f''(0) = t^2\, e^{t(0)} = t^2$$

Sehingga diperoleh:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} x^n \qquad (2.3)$$

(Purcell, Varberg, dan Rigdon, 2003)

2.6 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari peubah acak *X*, jika ada diberikan oleh jika *X* diskrit

$$M_x(t) = E\,(e^{tx}) = \sum_x e^{tx}\ f(x)$$

dan jika *X* kontinu

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\ f(x)$$

(Miller & Miller, 1999).

Teorema 2.1 Ketunggalan untuk Fungsi Pembangkit Momen

i. Bila dua fungsi pembangkit momen dari dua peubah acak ada dan sama, maka kedua peubah acak tersebut mempunyai fungsi distribusi yang sama.
ii. Bila dua peubah acak mempunyai fungsi distribusi yang sama, maka (bila ada) fungsi pembangkit momennya juga sama.

(Dudewicz & Mishra, 1995)

2.7 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi *Generalized Gamma* (GG)

Misalkan suatu peubah acak X berdistribusi GG (α, γ, m_1), maka fungsi pembangkit momen dari peubah acak X adalah sebagai berikut:

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\gamma)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(m_1 + \frac{n}{\alpha}\right)}{\Gamma(m_1)} \tag{2.4}$$

(Warsono, 2009).

2.8 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi *Generalized Log-Logistic* (GLL)

Misalkan suatu peubah acak X berdistribusi GLL (α, β, m_1, m_2), maka fungsi pembangkit momen dari peubah acak X adalah sebagai berikut:

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t\, e^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(m_1 + \frac{n}{\alpha}\right) .\ \Gamma\left(m_2 - \frac{n}{\alpha}\right)}{\Gamma(m_1)\ .\ \Gamma(m_2)} \tag{2.5}$$

(Warsono, 2010).

Teorema 2.2 *Limiting* Fungsi Pembangkit Momen

Misalkan peubah acak Y_n memiliki fungsi distribusi $F_n(y)$ dan fungsi pembangkit momen $M(t;n)$ yang terdefinisi untuk $-h < t < h$ untuk semua n. Jika terdapat suatu fungsi distribusi $F(y)$, yang berkorespondensi dengan fungsi pembangkit momen $M(t)$, terdefinisi untuk $|t| \leq h_1 < h$, sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} M(t;n) = M(t)$, maka Y_n memiliki distribusi limit dengan fungsi distribusi $F(y)$ (Hogg & Craig, 1995).

2.9 Isometri (U)

Menurut Rawuh (1994), isometri (sama ukuran) dengan lambang (U) adalah transformasi yang mempertahankan panjang ruas garis.

Sifat-sifat sebuah isometri :

1. Isometri mempertahankan besar sudut.
2. Isometri mempertahankan kesejajaran.
3. Isometri mempertahankan ketegaklurusan.
4. Hasil kali dua isometri akan merupakan isometri lagi.