II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan penelitian mengenai karakteristik fungsi pembangkit momen distribusi *generalized gamma*(α,γ,m_1) serta distribusi gamma(m_1,γ) sebagai kasus khusus distribusi *generalized gamma*(α,γ,m_1).

2.1 Distribusi Gamma

Peubah acak X dikatakan berdistribusi gamma, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m_1)\,\gamma^{m_1}}\ x^{m_1-1} e^{-\frac{x}{\gamma}} & ;\ x > 0,\ \ m_1 > 0,\ \ \gamma > 0 \\ o, & selainnya \end{cases}$$

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi gamma adalah gamma$(x; m_1, \gamma)$, artinya peubah acak X berdistribusi gamma dengan parameter m_1 dan γ, dimana m_1 menunjukkan *shape* (*skewness* dan *kurtosis*) dan γ menunjukkan *scale* (skala dan lokasi). Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi gamma berbentuk :

$$F(x; m_1, \gamma) = \int_0^x \frac{y^{m_1-1} e^{-y}}{\gamma^{m_1}\Gamma(m_1)}\ dy$$

(Herrhyanto dan Gantini, 2009)

Distribusi gamma berasal dari fungsi gamma yang banyak dipelajari dalam bidang matematika. Fungsi gamma didefinisikan sebagai berikut :

$$\Gamma(m_1) = \int_0^{\infty} x^{m_1-1} e^{-x}\, dx \,; \qquad m_1 > 0$$

(Myers, dkk, 2007)

2.2 Nilai Harapan Distribusi Gamma

Misalkan peubah acak X berdistribusi gamma(m_1, γ) maka nilai harapan dari X adalah

$$E(X) = m_1\gamma$$

Bukti:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(X)\, dx$$

$$= \int_o^{\infty} x \,\frac{1}{\Gamma(m_1)\, \gamma^{m_1}}\, x^{m_1-1} e^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)\, \gamma^{m_1}} \int_0^{\infty} x^{m_1}\, e^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx \tag{2.1}$$

Misalkan $y = \frac{x}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad x = \gamma y \quad \Rightarrow \quad dx = \gamma\, dy$

dengan mensubstitusikan pemisalan di atas ke dalam persamaan (2.1) akan diperoleh persamaan berikut:

$$E(X) = \frac{1}{\Gamma(m_1)\, \gamma^{m_1}} \int_0^{\infty} (\gamma y)^{m_1}\, e^{-y}\, \gamma\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)\, \gamma^{m_1}} \gamma^{m_1+1} \int_0^{\infty} y^{m_1}\, e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)}\, \gamma \int_0^{\infty} y^{m_1}\, e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)}\, \gamma \int_0^{\infty} y^{m_1-1+1}\, e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)} \gamma\, \Gamma(m_1 + 1)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)} \gamma\, m_1 \Gamma(m_1)$$

$$E(X) = m_1 \gamma \qquad \blacksquare$$

2.3 Varians Distribusi Gamma

Misalkan peubah acak X berdistribusi gamma(m_1, γ) maka varians dari X adalah

$$Var(X) = m_1 \gamma^2$$

Bukti:

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(X)\, dx$$

$$= \int_o^{\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(m_1)\, \gamma^{m_1}} x^{m_1 - 1} e^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)\, \gamma^{m_1}} \int_0^{\infty} x^{m_1 + 1} e^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx \qquad (2.2)$$

Misalkan $y = \frac{x}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad x = \gamma y \quad \Rightarrow \quad dx = \gamma\, dy$

dengan mensubstitusikan pemisalan di atas ke dalam persamaan (2.2) akan diperoleh persamaan berikut:

$$E(X^2) = \frac{1}{\Gamma(m_1)\, \gamma^{m_1}} \int_0^{\infty} (\gamma y)^{m_1 + 1} e^{-y} \gamma\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)\, \gamma^{m_1}} \gamma^{m_1 + 2} \int_0^{\infty} y^{m_1 + 1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)} \gamma^2 \int_0^{\infty} y^{m_1 + 1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)} \gamma^2 \int_0^{\infty} y^{m_1 - 1 + 2} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)} \gamma^2\, \Gamma(m_1 + 2)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)}\, \gamma^2\, m_1(m_1+1)\Gamma(m_1)$$

$$E(X^2) = \gamma^2 m_1(m_1+1)$$

$$Var(X) = \gamma^2 m_1(m_1+1) - (m_1\gamma)^2$$

$$= \gamma^2 {m_1}^2 + \gamma^2 m_1 - {m_1}^2\gamma^2$$

$$Var(X) = m_1\gamma^2 \qquad \blacksquare$$

(Herrhyanto dan Gantini, 2009)

2.4 Distribusi *Generalized Gamma*

Distribusi *Generalized Gamma* (GG) merupakan distribusi peluang kontinu dengan tiga parameter, yaitu; $\alpha > 0, \gamma > 0,$ dan $m_1 > 0$. Distribusi GG adalah generalisasi dari dua parameter distribusi gamma, yaitu; $m_1 > 0$ dan $\gamma > 0$. Distribusi Weibull dan distribusi log-normal merupakan kasus khusus dari GG. Distribusi-distribusi tersebut pada umumnya digunakan untuk model parametrik dalam analisis kelangsungan hidup. Distribusi GG terkadang digunakan untuk menentukan model parametrik mana yang cocok untuk sekumpulan data. Distribusi GG dan distribusi gamma memiliki domain yang sama yaitu untuk bilangan x yang tak negatif. Suatu peubah acak X menyebar mengikuti distribusi GG(α,γ,m_1) dan disebut sebagai peubah acak *generalized gamma* jika dan hanya

jika X memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut

$$f(x;\alpha,\gamma,m_1) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x\Gamma(m_1)}\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{\alpha m_1} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha}} & untuk\ x > 0 \\ 0 & selainnya \end{cases}$$

dengan $\alpha > 0, \gamma > 0,$ dan $m_1 > 0.$ (stacy, 1962)

2.5 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi *Generalized Gamma*

Pada bagian ini akan dijelaskan fungsi pembangkit momen dari peubah acak X berdistribusi GG(α,γ,m_1). Namun sebelumnya, akan diterangkan proposisi yang diperoleh (Warsono, 2010).

Proposisi

Distribusi GLL berparameter (α,β,m_1, m_2) konvergen ke distribusi GG dengan m_2 menuju ∞, $\alpha = a$, dan $\beta = -a\ ln\left(\gamma(m_2)^{\frac{1}{a}}\right)$.

Menurut (Warsono, 2010), jika suatu peubah acak X berdistribusi GG(α,γ,m_1), maka fungsi pembangkit momen dari X adalah

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\gamma)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{n}{\alpha}\right)}{\Gamma(m_1)}$$

Bukti:

Berdasarkan proposisi di atas, limit fungsi pembangkit momen distribusi GLL dengan m_2 menuju ∞ adalah

$$\lim_{m_2\to\infty} M_X(t)GLL\left(\alpha = a, \beta = -a\ ln\left(\gamma(m_2)^{\frac{1}{a}}\right), m_1, m_2\right)$$

$$= \lim_{m_2\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(te^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)^n}{n!} . \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{n}{\alpha}\right) .\ \Gamma\left(m_2-\frac{n}{\alpha}\right)}{\Gamma(m_1) .\ \Gamma(m_2)}$$

$$= \lim_{m_2\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(te^{-\frac{-a\ ln\left(\gamma(m_2)^{\frac{1}{a}}\right)}{a}}\right)^n}{n!} . \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{n}{a}\right) .\ \Gamma\left(m_2-\frac{n}{a}\right)}{\Gamma(m_1) .\ \Gamma(m_2)}$$

$$= \lim_{m_2\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(te^{ln\left(\gamma(m_2)^{\frac{1}{a}}\right)}\right)^n}{n!} . \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{n}{a}\right) .\ \Gamma\left(m_2-\frac{n}{a}\right)}{\Gamma(m_1) .\ \Gamma(m_2)}$$

$$= \lim_{m_2\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t\,\gamma\,(m_2)^{\frac{1}{a}}\right)^n}{n!} \cdot \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{n}{a}\right).\ \Gamma\left(m_2-\frac{n}{a}\right)}{\Gamma(m_1)\ .\ \Gamma(m_2)}$$

$$= \lim_{m_2\to\infty} 1 + \lim_{m_2\to\infty} \left(t\gamma\ (m_2)^{\frac{1}{a}}\right) . \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{1}{a}\right).\ \Gamma\left(m_2-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(m_1)\ .\ \Gamma(m_2)} +$$

$$\lim_{m_2\to\infty} \frac{\left(t\,\gamma\,(m_2)^{\frac{1}{a}}\right)^2}{2!} . \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(m_2-\frac{2}{a}\right)}{\Gamma(m_1).\Gamma(m_2)} + \lim_{m_2\to\infty} \frac{\left(t\,\gamma\,(m_2)^{\frac{1}{a}}\right)^3}{3!} . \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{3}{a}\right)\Gamma\left(m_2-\frac{3}{a}\right)}{\Gamma(m_1).\Gamma(m_2)} + \cdots$$

$$= \lim_{m_2\to\infty} 1 + (t\gamma)\frac{\Gamma\left(m_1+\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} \lim_{m_2\to\infty} (m_2)^{\frac{1}{a}} . \frac{\Gamma\left(m_2-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(m_2)} +$$

$$\frac{(t\gamma)^2}{2!}\frac{\Gamma\left(m_1+\frac{2}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} \lim_{m_2\to\infty} (m_2)^{\frac{2}{a}} . \frac{\Gamma\left(m_2-\frac{2}{a}\right)}{\Gamma(m_2)} + \frac{(t\gamma)^3}{3!}\frac{\Gamma\left(m_1+\frac{3}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} \lim_{m_2\to\infty} (m_2)^{\frac{3}{a}} . \frac{\Gamma\left(m_2-\frac{3}{a}\right)}{\Gamma(m_2)} + \cdots$$

Rumus aproksimasi Stirling dari fungsi gamma (Spiegel, 1968) adalah

$$\Gamma(az+b) \sim \sqrt{2\pi}\ .\ e^{-az}(az)^{az-b-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Gamma\left(m_2-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(m_2)} \sim \frac{\sqrt{2\pi}\ .e^{-m_2}(m_2)^{m_2-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\ .e^{-m_2}(m_2)^{m_2-\frac{1}{2}}} = {m_2}^{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{{m_2}^{\frac{1}{a}}}$$

Maka momen properti limit dari distribusi GLL(α,β,m_1, m_2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{m_2\to\infty} M_X(t)GLL\left(\alpha = a, \beta = -a\ ln\left(\gamma(m_2)^{\frac{1}{a}}\right), m_1, m_2\right)$$

$$= \lim_{m_2\to\infty} 1 + (t\gamma)\frac{\Gamma\left(m_1+\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} \lim_{m_2\to\infty} (m_2)^{\frac{1}{a}} . \frac{1}{{m_2}^{\frac{1}{a}}} + \frac{(t\gamma)^2}{2!}\frac{\Gamma\left(m_1+\frac{2}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} \lim_{m_2\to\infty} (m_2)^{\frac{2}{a}} . \frac{1}{{m_2}^{\frac{1}{a}}} +$$

$$\frac{(t\gamma)^3}{3!}\frac{\Gamma\left(m_1+\frac{3}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} \lim_{m_2\to\infty} (m_2)^{\frac{3}{a}} . \frac{1}{{m_2}^{\frac{1}{a}}} + \cdots$$

$$= 1 + (t\gamma)\frac{\Gamma\left(m_1+\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} + \frac{(t\gamma)^2}{2!}\frac{\Gamma\left(m_1+\frac{2}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\gamma)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(m_1+\frac{n}{a}\right)}{\Gamma(m_1)} \qquad \blacksquare$$

2.6 Ekspansi Deret Maclaurin

Ekspansi deret Maclaurin bagi fungsi $f(t)$ adalah sebagai berikut:

$$f(t) = f(0) + f'(0)(t) + \frac{f''(0)}{2!}(t)^2 + \cdots \quad (2.3)$$

Jika fungsi $f(t) = e^{tx}$, maka fungsi tersebut dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \quad (2.4)$$

(Purcell dkk, 2003)