II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Percobaan dan Ruang Sampel

Menurut Walpole (1995), istilah percobaan digunakan untuk sembarang proses yang dapat membangkitkan data. Himpunan semua hasil suatu percobaan disebut ruang sampel dan dilambangkan dengan huruf S. Ruang sampel beranggotakan hasil dari suatu percobaan yang disebut sebagai titik sampel. Titik-titik sampel ini dapat membentuk beberapa himpunan yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel dan disebut sebagai kejadian. Berikut ini adalah beberapa definisi yang membahas masalah ruang sampel beserta sifat-sifatnya:

Definisi 2.1.1 (Walpole, 1995):

Ruang sampel dari suatu percobaan adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.

Ruang sampel dibedakan atas dua macam, yakni ruang sampel diskret dan ruang sampel kontinu. Ruang sampel diskret adalah ruang sampel yang mengandung titik-titik sampel yang banyaknya terhingga atau titik-titik sampelnya berupa barisan yang tidak berakhir namun nilainya sama banyak dengan nilai bilangan cacah. Adapun ruang sampel kontinu adalah ruang sampel yang mengandung titik sampel yang banyaknya tak terhingga dan sama banyak dengan banyaknya titik-titik pada sebuah ruas garis (Walpole & Myers, 1995:52).

Definisi 2.1.2 (Bain & Engelhardt, 1992):

Misalkan *S* adalah ruang sampel suatu percobaan dan A_1, A_2, …. adalah kejadian-kejadian yang mungkin terjadi dalam *S*, dan misalkan *P* adalah suatu fungsi yang menghasilkan nilai real *P(A)* untuk setiap kejadian *A*, maka *P(A)* disebut peluang dari *A* jika memenuhi:

a. P(A) ≥ 0, untuk setiap kejadian *A*

b. P(S) = 1

c. Jika A_1, A_2, …. adalah barisan kejadian saling asing ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dengan $i \neq j$ dan $A_i \in S$) maka:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (2.1)$$

Definisi 2.1.3 (Walpole, 1995):

Peluang suatu kejadian *A* adalah jumlah peluang semua titik sampel dalam *A*. Jadi

$$0 \leq P(A) \leq 1, P(\emptyset) = 0, dan\ P(S) = 1$$

Bila ruang sampel suatu percobaan mempunyai *N* unsur, dan masing-masing unsur tersebut mempunyai peluang yang sama untuk terjadi, maka pada setiap titik sampel diberikan peluang sebesar $\frac{1}{N}$. Dengan demikian, peluang kejadian *A*, yang berisikan *n* titik sampel adalah rasio banyaknya titik sampel atau unsur dalam *A* dengan banyaknya titik sampel atau unsur dalam *S*.

2.2 Peubah Acak dan Fungsi Peluang

1. Peubah Acak

   Definisi 2.2.1 (Walpole dan Myers, 1995):

   Peubah acak adalah suatu fungsi yang memetakan setiap unsur dalam ruang sampel *S* dengan suatu bilangan real. Peubah acak biasanya dinyatakan dengan huruf besar misalnya *X*, sedangkan nilainya dinyatakan dengan huruf kecil padanannya, yaitu *x*.

   Jika himpunan semua hasil yang mungkin dari peubah acak *X* berhingga atau tak berhingga tetapi masih dapat dihitung maka *X* disebut sebagai peubah acak diskret. Sedangkan jika semua hasil yang mungkin dari peubah acak *X* mencapai nilai dalam suatu interval maka *X* disebut sebagai peubah acak kontinu.

2. Fungsi Peluang dan Fungsi Kepekatan Peluang

   Definisi 2.2.3 (Walpole dan Myers, 1995):

   Apabila *X* merupakan peubah acak diskret, maka *f(x)* disebut fungsi peluang dari peubah acak *X*, jika memenuhi:

   1. $f(x) \geq 0$
   2. $\sum_x f(x) = 1$
   3. $P(X = x) = f(x)$

   Definisi 2.2.4 (Walpole dan Myers, 1995):

   Apabila *X* merupakan peubah acak kontinu, maka *f(x)* disebut fungsi kepekatan peluang dari peubah acak *X*, jika memenuhi:

   1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

2.3 Sampling atau Pengambilan Contoh

Statistika terbagi atas dua fase ialah statistika deskriptif dan statistika induktif. Fase pertama dikerjakan untuk melakukan fase kedua. Fase kedua, statistika induktif, berusaha menyimpulkan tentang karakteristik populasi, yang pada umumnya dilakukan berdasarkan data sampel yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Populasi adalah totalitas semua nilai yang mungkin, baik hasil menghitung maupun pengukuran, kuantitatif maupun kualitatif, daripada karakteristik tertentu mengenai sekumpulan obyek yang lengkap dan jelas. Sampel adalah sebagian yang diambil dari populasi dengan menggunakan cara-cara tertentu. Untuk mendapatkan kesimpulan yang dapat dipertanggungjawabkan haruslah ditempuh cara-cara yang benar dalam setiap langkah termasuk cara-cara pengambilan atau sampling (Sudjana, 2002).

2.3.1 Alasan Sampling

Untuk melakukan analisis statistik diperlukan data, karenanya data perlu dikumpulkan. Bergantung pada berbagai faktor, untuk ini kadang-kadang dilakukan sensus, kadang-kadang dilakukan sampling. Sensus terjadi apabila setiap anggota atau karakteristik yang ada di dalam populasi dikenai penelitian. Jika tidak, maka samplinglah yang ditempuh, yaitu sampel diambil dari populasi dan datanya dikumpulkan.

Ada berbagai alasan mengapa sensus tidak dapat dilakukan, antara lain:

a. Ukuran populasi

b. Masalah biaya

c. Masalah waktu

d. Percobaan yang sifatnya merusak

e. Masalah ketelitian

f. Faktor ekonomis (Sudjana, 2002).

2.3.2 Sampling Sekuensial

Sampling sekuensial adalah pengambilan sampel yang setiap anggota sampel diambil satu demi satu dan pada setiap kali selesai pangambilan sampel, analisis dilakukan. Selanjutnya sampel diambil dan diperoleh kesimpulan, yaitu apakah sampling berhenti ataukah akan dilanjutkan. Setiap anggota yang diambil disatukan dengan anggota-anggota yang telah diambil terlebih dahulu sebelum dijadikan sebuah kesimpulan (Sudjana, 2002).

2.4 Konsep Dasar dan Fungsi Tahan Hidup

Data tahan hidup merupakan interval waktu yang diamati dari suatu objek saat pertama kali masuk ke dalam pengamatan sampai dengan objek tersebut tidak berfungsi atau mati. Misalnya interval waktu yang mengukur kerusakan suatu produk, matinya suatu makhluk hidup, atau kambuhnya suatu penyakit.

Fungsi-fungsi pada distribusi waktu hidup merupakan suatu fungsi yang menggunakan variabel random waktu hidup. Variabel random waktu hidup biasanya dinotasikan dengan huruf T dan akan membentuk suatu distribusi. Distribusi waktu hidup dijelaskan oleh tiga fungsi, yaitu fungsi tahan hidup S(t), fungsi densitas peluang f(t) dan fungsi kegagalan/fungsi *hazard* h(t). Ketiga fungsi tersebut ekuivalen secara matematik, yang berarti jika salah satu dari ketiga fungsi tersebut diketahui, maka fungsi yang lain dapat diturunkan.

Ketahanan hidup (reliabilitas) adalah peluang suatu produk akan beroperasi dengan baik untuk periode yang telah ditetapkan di bawah kondisi yang ditentukan, seperti suhu dan tegangan, tanpa kegagalan.

Dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S(t) &= P\ (\text{objek hidup lebih dari waktu t}) \\ &= P(T > t) \\ &= 1 - P\ (\text{objek gagal sebelum waktu t}) \\ &= 1 - P(T \leq t) \qquad (2.2) \end{aligned}$$

(Prayudhani dan Wuryandari, 2010).

2.5 Fungsi Densitas Peluang T

Waktu tahan hidup T mempunyai fungsi densitas peluang yang dinotasikan dengan $f(t)$ dan didefinisikan sebagai peluang kegagalan suatu objek pada interval $(t, t + \Delta t)$ per satuan waktu. Fungsi densitas peluang dinyatakan sebagai

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to o} \left[\frac{P(objek\ gagal\ pada\ interval\ (t,\ t + \Delta t))}{\Delta t} \right]$$

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to o} \left[\frac{P(t<T< t+\Delta t)}{\Delta t}\right] \quad (2.3)$$

(Prayudhani dan Wuryandari, 2010).

2.6 Fungsi Laju Tingkat Kegagalan (Fungsi Hazard)

Fungsi kegagalan dari waktu tahan hidup T dinotasikan dengan $h(t)$ dan didefinisikan sebagai peluang suatu objek gagal di dalam interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan diketahui bahwa objek tersebut telah hidup selama waktu t .

Fungsi kegagalannya dinyatakan dengan:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to o} \left[\frac{P(t\leq T< t+\Delta t|T\geq t)}{\Delta t}\right] \quad (2.4)$$

(Prayudhani dan Wuryandari, 2010).

2.7 Distribusi Probabilitas Binomial

Distribusi probabilitas Binomial adalah distribusi probabilitas diskret yang sering terjadi. Salah satu ciri distribusi Binomial adalah hanya memiliki dua hasil yang mungkin terjadi dalam sebuah percobaan dari satu eksperimen. Sebagai contoh, pernyataan dari pertanyaan benar/salah hanya dapat berupa “benar” atau “salah.” Hasil-hasilnya tidak terikat satu sama lain, yang artinya jawaban untuk sebuah pertanyaan benar/salah tidak mungkin sekaligus “benar” dan “salah.”

Rumus Probabilitas Binomial:

$$P(X) = \begin{cases} \binom{n}{X}\pi^X(1-\pi)^{n-X} & ; X = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & ; X\ lainnya \end{cases} \quad (2.5)$$

dengan:

n adalah jumlah percobaan

X adalah variabel acak yang menyatakan jumlah sukses

π adalah probabilitas sukses untuk setiap percobaan

(Lind, dkk., 2012).

2.8 Distribusi Probabilitas Poisson

Distribusi probabilitas Poisson menjelaskan banyaknya kejadian yang terjadi selama interval tertentu. Interval tersebut dapat berupa waktu, jarak, luas, atau volume.

Distribusi ini didasarkan pada asumsi. Asumsi pertama adalah bahwa probabilitas proporsional dengan panjangnya interval. Asumsi kedua adalah bahwa interval-intervalnya saling bebas. Dengan kata lain, makin panjang interval, makin besar probabilitasnya, dan banyaknya kejadian dalam satu interval tidak mempengaruhi interval-interval lainnya. Distribusi ini juga merupakan suatu bentuk distribusi Binomial yang terbatas ketika probabilitas sebuah kejadian sukses sangat kecil dan nilai n besar. Hal ini sering disebut “hukum kejadian tidak mungkin,” yang berarti bahwa probabilitas, π, dari kejadian sebuah kejadian tertentu cukup kecil. Distribusi Poisson adalah sebuah distribusi probabilitas diskret karena distribusi ini dibentuk dengan cara menghitung.

Distribusi Poisson:

$$P(X) = \begin{cases} \frac{\mu^X e^{-\mu}}{X!} ; X \geq 0 \\ 0 \quad ; X \ lainnya \end{cases} \tag{2.6}$$

μ adalah nilai rata-rata dari kejadian (sukses) dalam suatu interval

e adalah konstanta 2,71828 (basis dari sistem logaritmis Napier)

X adalah jumlah kejadian sukses

P(X) adalah probabilitas untuk sebuah nilai *X* tertentu

(Lind, dkk., 2012).

2.9 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan bentuk khusus dari distribusi Gamma dengan α = 1 dan β = θ.

Fungsi Densitas Eksponensial:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{\frac{-t}{\theta}} & ; t \geq 0, \theta > 0 \\ 0 & ; t \ lainnya \end{cases} \quad (2.7)$$

Fungsi distribusi kumulatif distribusi Eksponensial adalah:

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\theta} e^{\frac{-t}{\theta}} dt$$

$$F(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{-t}{\theta}} dt$$

$$F(t) = \frac{1}{\theta} \left[-\theta e^{\frac{-t}{\theta}} \right]_0^t$$

$$F(t) = -e^{\frac{-t}{\theta}}]_0^t$$

$$F(t) = 1 - e^{\frac{-t}{\theta}} \quad (2.8)$$

Fungsi tahan hidupnya adalah $S(t) = 1 - F(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$ (2.9)

Fungsi kegagalannya adalah $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{1}{\theta}$ (2.10)

dengan θ adalah rata-rata waktu kegagalan dan t adalah waktu percobaan (Bain dan Engelhardt, 1992).

2.10 Fungsi Likelihood

Definisi 2.10.1 (Bain dan Engelhardt, 1992):

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ sampel acak dengan fungsi peluang, $f(x_i, \theta_i)$ untuk i = 1,2,3, ... , n. Apabila $L(\theta)$ yaitu fungsi peluang bersama dari $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ yang dipandang sebagai fungsi dari θ dan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ menyatakan nilai tertentu, maka:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

$$= f(x_1, \theta).f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta) \quad (2.11)$$

Fungsi $L(\theta)$ inilah yang disebut sebagai fungsi *likelihood*.

2.11 Likelihood Ratio Test

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ merupakan peubah acak yang saling bebas sebanyak n. Dengan fungsi kepekatan peluang $f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m), i = 1, 2, \ldots, n$. Himpunan yang terdiri dari semua parameter $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ dinotasikan oleh Ω, yang mana bisa disebut sebagai ruang parameter. Misal ω merupakan subset dari ruang parameter Ω. Kita akan menguji hipotesis $H_0: (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \omega$ melawan semua hipotesis alternatif. Dengan fungsi *likelihood*:

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m), \quad (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \omega, \quad (2.12)$$

dan

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \qquad (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \Omega. \qquad (2.13)$$

Misal $L(\hat{\omega})$ dan $L(\hat{\Omega})$ merupakan fungsi maksimal yang mana diasumsikan untuk ada dari dua fungsi *likelihood*. Rasio dari $L(\hat{\omega})$ dan $L(\hat{\Omega})$ disebut *likelihood ratio test* dan dinotasikan oleh:

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \qquad (2.14)$$

Misal λ_0 merupakan fungsi positif yang baik. *Likelihood ratio test principle* menyatakan bahwa hipotesis H_0: $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \omega$ ditolak jika dan hanya jika:

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \le \lambda_0 \qquad (2.15)$$

Fungsi λ mendefinisikan peubah acak $\lambda(X_1, X_2, \dots, X_n)$, dan tingkat signifikansi dari pengujian diberikan oleh:

$$\alpha = \Pr[\lambda(X_1, X_2, \dots, X_n) \le \lambda_0; H_0] \qquad (2.16)$$

(Hogg dan Craig, 1978).

2.12 Parameter dan Statistik

Definisi 2.12.1 (Walpole, 1995):

Sembarang nilai yang menjelaskan ciri populasi disebut parameter. Parameter dilambangkan dengan huruf Yunani dan parameter merupakan suatu konstanta yang menjelaskan populasi.

Definisi 2.12.2 (Walpole, 1995):

Sembarang nilai yang menjelaskan ciri suatu sampel disebut statistik. Statistik biasanya dinyatakan dalam huruf kecil.

2.13 Pengujian Hipotesis Statistik

Definisi 2.13.1 (Walpole, 1995):

Hipotesis statistik adalah suatu anggapan atau pernyataan, yang mungkin benar atau tidak, mengenai satu populasi atau lebih.

Pengujian hipotesis akan membawa kepada kesimpulan untuk menerima hipotesis atau menolak hipotesis. Jadi dengan demikian terdapat dua pilihan. Agar dalam penentuan salah satu di antara dua pilihan itu lebih terperinci dan lebih mudah dilakukan, maka akan digunakan perumusan perumusan yang diperlukan. Hipotesis biasanya dinyatakan dengan H, agar dirumuskan dengan singkat dan jelas sesuai dengan persoalan yang dihadapi. Hipotesis H ini perlu didampingi oleh pernyataan lain yang menyatakan berlawanan, maka hipotesis H dinyatakan dengan H_0 dan H_1, yang artinya H_0 melawan H_1 dan ini juga menentukan kriteria pengujian yang terdiri dari daerah penerimaan dan daerah penolakan hipotesis. Daerah penolakan hipotesis sering pula di kenal dengan nama daerah kritis.

Dalam pengujian hipotesis akan terjadi dua macam kesalahan yaitu:

1. Kesalahan tipe 1 yaitu menolak hipotesis yang seharusnya diterima.
2. Kesalahan tipe 2 yaitu menerima hipotesis yang seharusnya ditolak.

Dengan menggunakan pernyataan peluang bersyarat kedua tipe kesalahan pengujian hipotesis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P(menolak\ H_0 | H_0\ benar) = \alpha$$

$$P(tidak\ menolak\ H_0 | H_0\ salah) = \beta$$

2.14 Pentingnya Penarikan Sampel untuk Keperluan Penerimaan

Pemeriksaan untuk keperluan penerimaan dilakukan pada banyak tahapan dalam pembuatan. Barangkali ada pemeriksaan bahan dan komponen yang masuk, pemeriksaan proses pada berbagai hal dalam operasi pembuatan, pemeriksaan akhir terhadap produk-produknya sendiri oleh pembuatan, dan akhirnya pemeriksaan produk jadi oleh seorang atau lebih pembeli.

Kebanyakan dari pemeriksaan penerimaan ini haruslah berdasarkan penarikan sampel. Semua pengujian penerimaan yang bersifat merusak barang yang diuji mau tidak mau harus dilakukan dengan penarikan sampel. Dalam banyak perusahaan lainnya, pemeriksaan penarikan sampel digunakan karena biaya pemeriksaan 100% merupakan penghalang. Sangat banyak jenis produk yang sama yang harus diperiksa, pemeriksaan penarikan sampel dapat lebih baik daripada pemeriksaan 100% karena pengaruh kelelahan pemeriksaan dalam pemeriksaan 100% (Grant dan Leavenworth, 1994).

2.15 Tekanan untuk Perbaikan Mutu

Pemeriksaan, dalam pengertian pemilihan produk yang memenuhi spesifikasi dari yang tidak memenuhi, tidak menjamin bahwa semua produk yang diterima sungguh-sungguh memenuhi spesifikasi. Kelelahan pemeriksaan pada operasi pemeriksaan berulang-ulang seringkali akan membatasi keefektifan pemeriksaan 100%. Jelaslah, tidak ada prosedur penarikan sampel yang dapat menghapus semua produk yang tak sesuai. Itu berarti bahwa cara terbaik untuk menjamin bahwa produk yang diterima memenuhi spesifikasi adalah membuat produk tersebut secara benar. Jika seorang produsen tidak membuat produk yang benar, dan akibatnya, ia mempercayai konsumen untuk melakukan pemeriksaan penyaringan, seringkali terjadi bahwa perbaikan mutu yang mencolok dapat disebabkan oleh penolakan sekaligus terhadap seluruh lot produk akibat adanya barang yang tak sesuai yang ditemukan dalam sampel. Penolakan seluruh lot membawa tekanan yang jauh lebih besar terhadap perbaikan mutu daripada penolakan masing-masing barang.

Dalam fungsi resiko, kedua tipe kesalahan pengujian hipotesis dapat dinyatakan sebagai berikut:

α = Risiko Produsen, peluang penolakan produk pada mutu yang diinginkan, yang dinyatakan $\alpha = 1 - P_a$ pada mutu tersebut.

β = Risiko Konsumen, probabilitas penerimaan produk pada mutu yang tidak dikehendaki, yang dinyatakan β ini adalah nilai P_a pada mutu tersebut.

Dengan P_a adalah probabilitas penerimaan barang (Grant dan Leavenworth, 1994).

2.16 Analisis sekuensial

Definisi 2.16.1 (Sudjana, 2002):

Analisis sekuensial adalah analisis yang membawa kepada kesimpulan statistik dimana banyak obyek yang diamati tidak ditentukan terlebih dahulu melainkan diamati secara sekuens (berurutan) atau satu demi satu.