II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Bulat, Bilangan Rasional, dan Bilangan Real

Himpunan dinyatakan dengan huruf kapital dan anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil. Sebagai contoh "a anggota himpunan *A*" ditulis $a \in A$; "b bukan anggota *A*" ditulis $b \notin A$, dan sebagainya. (*Priestly*,*1993*)

Contoh :

Himpunan *A* terdiri dari bilangan-bilangan 1, 3, dan 4 ditulis $A = \{1,3,4\}$. Jika anggota suatu himpunan secara eksplisit didaftar maka dapat dinyatakan sifatnya saja untuk anggota-anggota secara keseluruhan. Suatu himpunan yang mempunyai sifat P ditulis sebagai $\{x|P\}$ dibaca "himpunan seluruh x yang mempunyai sifat P"

Sekarang, disajikan berbagai macam bilangan yang kerap digunakan sehari-hari.

1. Himpunan bilangan-bilangan bulat positip atau bilangan asli, N:

$$N \equiv \{1,2,3, \dots .\} \tag{2.1}$$

2. Himpunan bilangan-bilangan bulat, Z:

$$Z \equiv \{\dots \dots ., -4, -3, -2, -1,0,1,2,3,4, \dots \dots .\} \tag{2.2}$$

3. Himpunan bilangan-bilangan bulat positip genap E:

$$E \equiv \{e: e = 2n, n \epsilon N\} \tag{2.3}$$

4. Himpunan bilangan-bilangan rasional :

$$Q \equiv \left\{q: q = \frac{m}{n}, m \in Z, n \neq 0\right\} \tag{2.4}$$

Himpunan bilangan-bilangan real $\mathcal{R}$ yaitu himpunan bilangan-bilangan rasional dan irasional. Bilangan irasional yaitu bilangan-bilangan yang tidak dapat disajikan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan $m \in Z, n \neq 0$. Sebagai contoh bilangan irasional adalah $\sqrt{2} = 1.4142 \ldots\ldots$

Korespondensi satu-satu dapat dibangun antara bilangan-bilangan real dan garis. Masing-masing bilangan diwakili oleh titik pada garis yang disebut sumbu real.

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 $-\frac{1}{2}$ 0 1 $\sqrt{2}$ 2 3 4 5 6 7

Suatu himpunan *A* merupakan himpunan bagian dari himpunan *B*, yaitu *A* termuat dalam *B*, jika

$$x \in A \Longrightarrow x \in B \tag{2.5}$$

Dibaca : Jika $x \in A$ maka $x \in B$. Penulisan $A \subset B$ selanjutnya untuk menyatakan bahwa *A* merupakan himpunan bagian *B*.

Mudah dipahami bahwa $E \subset N, N \subset Z, Z \subset Q$ dan $Q \subset R$, sehingga

$$E \subset N \subset Z \subset Q \subset R \tag{2.6}$$

2.2 Bilangan Kompleks, Satuan Imajiner "i"

Suatu bilangan kompleks z dapat dinyatakan sebagai

$$z = a + bi \tag{2.7}$$

dengan a dan b bilangan-bilangan real dan I mempunyai sifat

$$i^2 = -1 \tag{2.8}$$

(*Brown and Churchill, 1996*)

2.3 Operasi Dasar Dalam Bilangan Kompleks

Teorema 2.3.1

Untuk semua bilangan kompleks berlaku sifat additif dan asssosiatif terhadap penjumlahan

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \tag{2.9}$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \tag{2.10}$$

<u>*Bukti*</u> :

Misal $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ dan $z_3 = a_3 + ib_3$ maka :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ &= (a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (a_1 + ib_1) + [(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)]$$
$$= (a_1 + ib_1) + [(a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)]$$
$$= [a_1 + (a_2 + a_3)] + i[b_1 + (b_2 + b_3)]$$
$$= [(a_1 + a_2) + a_3] + i[(b_1 + b_2) + b_3]$$
$$= [(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)] + (a_3 + ib_3)$$
$$= (z_1 + z_2) + z_3 \tag{2.12}$$

Teorema 2.3.2:

1. Perkalian bilangan-bilangan kompleks bersifat komutatif.

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \tag{2.13}$$

2. Perkalian bilangan-bilangan kompleks bersifat asosiatif.

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \tag{2.14}$$

3. Perkalian bilangan-bilangan kompleks bersifat distributif terhadap penjumlahan.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3 \tag{2.15}$$

Bukti:

Misal $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ dan $z_3 = a_3 + ib_3$ maka :

1. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$

$$= a_1 + a_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) + i^2 b_1 b_2$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
$$= a_2 a_1 - b_2 b_1 + i(b_2 a_1 + a_2 b_1)$$
$$= (a_2 + ib_2)(a_1 + ib_1)$$
$$= z_2 \cdot z_1$$

2. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (a_1 + ib_1) + [(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)]$

$= (a_1 + ib_1) \cdot [(a_2a_3 - b_2b_3) + i(b_2a_3 + a_2b_3)]$

$= a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(b_2a_3 + a_2b_3) + i[b_1(a_2a_3 -$

$b_2b_3) + a_1(b_2a_3 + a_2b_3)]$

$= (a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + a_2b_1)b_3 + i[(a_1b_2 +$

$a_2b_1)a_3 + (a_1a_2 - b_1b_2)b_3]$

$= [(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)] \cdot (a_3 + ib_3)$

$= \big((z_1 \cdot z_2) \cdot z_3\big)$

3. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a_1 + ib_1) + [(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)]$

$= (a_1 + ib_1) \cdot [(a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)]$

$= a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) + ib_1(a_2 + a_3) +$

$ia_1(b_2 + b_3)$

$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2) + (a_1a_3 - b_1b_3) +$

$i(a_1b_3 + b_1a_3)$

$= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Teorema 2.3.3:

Diberikan dua bilangan kompleks $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2, z_2 \neq 0$, maka terdapat bilangan kompleks z yang tunggal, sehingga $zz_2 = z_1$

<u>*Bukti*</u> :

Misal $z = a + ib$, maka

$$zz_2 = (a + ib)(a_2 + ib_2)$$

$$= (aa_2 - bb_2) + i(ba_2 + ab_2)$$

$$= a_1 + ib_1 \qquad (2.16)$$

Persamaan (2.16) benar jika dan hanya jika,

$$aa_2 - bb_2 = a_1 \text{ dan } ba_2 - ab_2 = b_1 \qquad (2.17)$$

dan dengan menyelesaikan persamaan (2.17), untuk a dan b diperoleh

$$a = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \qquad b = \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

Sehingga, $z = a + ib$ tunggal.

Teorema 2.3.4 :

$z_1z_2 = 0$ jika dan hanya jika setidaknya salah satu dari z_1, z_2 adalah nol.

<u>*Bukti*</u>:

Misal $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$. Maka :

$$z_1z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \qquad (2.18)$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$= 0$$

Dari persamaan (2.18) diatas diperoleh

$$a_1a_2 - b_1b_2 = 0 \qquad (2.19)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = 0 \qquad (2.20)$$

Sehingga

$$0 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2b_2^2) \qquad (2.21)$$

Jika $a_1^2 + b_1^2$ dan $a_2^2 + b_2^2$ tidak sama dengan nol, maka persamaan (4) tidak benar. Oleh karena itu, $z_1 z_2 = 0$ jika dan hanya jika setidaknya salah satu dari z_1, z_2 adalah nol.

Perhatikan disini bahwa jika z bilangan kompleks dan n bilangan bulat positip, maka

$$z^n = \underbrace{z.z \dots \dots \dots . z}_{n \text{ kali}}$$

(Spiegel,M.R.,1981)

2.4 Konjugat Bilangan kompleks

Konjugat, $\bar{z}$ dari bilangan komplek $z = a + ib$ didefenisikan

$$\bar{z} \equiv a - ib \qquad (2.22)$$

Bagian real dari $z = a + ib$ ditulis Re(z). Jadi

$$\mathrm{Re}(z) = a \qquad (2.23)$$

Bagian imajiner dari $z = a + ib$ ditulis

$$\mathrm{Im}(z) = b. \qquad (2.24)$$

Sehingga

$$z = a + ib \qquad (2.25)$$

$$= \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

(Milewsky,E.G.,1989)

Contoh:

Buktikan bahwa jika hasil kali dari dua bilangan kompleks z_1 dan z_2 adalah real dan tidak sama dengan nol, maka terdapat bilangan real α, sehingga $z_1 = \alpha\bar{z}_2$.

<u>*Bukti*</u>:

Misal $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$

Hasil dari z_1 dan z_2 real dan tidak sama dengan nol,

$$z_1 z_2 \neq 0 \tag{2.26}$$

sehingga, $z_2 \neq 0$ dan $\bar{z}_2 \neq 0$ dan dapat ditulis

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{(a_2 - ib_2)} = \frac{z_1(a_2 + ib_2)}{(a_2 - ib_2)(a_2 + ib_2)} = \frac{z_1 z_2}{a_2^2 + b_2^2} = \alpha \tag{2.27}$$

Karena $z_1 z_2$ real dan tidak sama dengan nol dan $a_2^2 + b_2^2$ juga real dan tidak sama dengan nol, maka dari persamaan (2) diperoleh

$$z_1 = \alpha\bar{z}_2 \tag{2.28}$$

2.5 Modulus atau Nilai Mutlak Bilangan Kompleks

Modulus atau nilai absolut dari bilangan komplek $z = a + ib$, ditulis $|z|$,

$$|z| \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nilai mutlak dari suatu bilangan komplek bersifat non-negatif dan merupakan bilangan real.

(Hauser,A.A.,1971)

Contoh :

Buktikan ketaksamaan segitiga: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Bukti :

Karena $|z|^2 = z\bar{z}$, diperoleh

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 \qquad (2.29) \end{aligned}$$

Karena $2\text{Re}(z) = z + \bar{z}$, persamaan (2.29) menjadi

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \qquad (2.30) \end{aligned}$$

Sehingga

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \qquad (2.31)$$

dan

$$|z_1| + |z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad (2.32)$$

Menggunakan induksi matematika, persamaan (2.32) dapat dikembangkan sampai n bilangan kompleks

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2.6 Ketidaksamaan dan Identitas

Contoh :

Tunjukkan bahwa jika $|z| \leq 1$, maka

$$|z-1| + |z+1| \leq 2\sqrt{2} \tag{2.33}$$

<u>*Bukti*</u>:

Karena kedua ruas dari persamaan (2.33) positif, maka dengan mengkuadratkan

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 + 2|z-1||z+1| \leq 8 \tag{2.34}$$

sehingga

$$(z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) + 2|(z-1)(z+1)| \leq 8 \tag{2.35}$$

dan

$$|z|^2 - z - \bar{z} + 1 + |z|^2 + z + \bar{z} - 1 + 2|z^2+1| \leq 8 \tag{2.36}$$

atau

$$2|z|^2 + 2 + 2|z^2+1| \leq 8 \tag{2.37}$$

$$|z|^2 + |z^2+1| \leq 3 \tag{2.38}$$

$$|z|^2 + |z^2 + (-1)| \leq |z|^2 + |z|^2 + |-1| \tag{2.39}$$

$$= |z|^2 + |z|^2 + 1 \tag{2.40}$$

Perhatikan bahwa

$$|z|^2 = |zz| = |z||z| = |z|^2 \tag{2.41}$$

Karena $|z| \leq 1$, yang juga $|z|^2 \leq 1$

$$|z|^2 + |z|^2 + 1 \leq 1 + 1 + 1 = 3 \tag{2.42}$$

dan

$$|z|^2 + |z^2 - 1| \leq 3 \tag{2.43}$$

sehingga terbukti persamaan (2.33)

(Marsden and Hoffman, 1987)