II. LANDASAN TEORI

2.1 Model Nonlinear

Model nonlinear merupakan bentuk hubungan antara peubah respon dengan peubah penjelas yang tidak linear dalam parameter. Secara umum model nonlinear ditulis sebagai berikut :

$$y_i = f(x_i,) + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

(i= 1,2,...,n)

dengan,

y_i : peubah respon ke-i

f(.) : fungsi nonlinear

x_i : peubah penjelas respon ke-i

: parameter

ε_i : galat ke-i

ε_i diasumsikan saling bebas dan menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan ragam σ^2.

Model nonlinear dapat dibagi menjadi dua yaitu model nonlinear secara intrinsik linear (*intrisnsically linear*) dan nonlinear secara intrinsik nonliear (*intrinsically nonlinear*). Model yang secara intrinsik linear adalah model nonlinear yang dapat ditransformasi menjadi bentuk linear sedangkan model yang secara intrinsik nonlinear yaitu model yang tidak bisa ditransformasi menjadi bentuk linear (Draper and Smith, 1981).

Adapun contoh model nonlinear secara intrinsik nonlinear yaitu pada model produksi CES (*Constant Elasticity of Subtitution*), yaitu fungsi dengan elastisitas konstan.

2.2 Model Produksi CES (*Constant Elasticity of Subtitutions*)

Menurut Rasidin dan Bonar (2006) fungsi *constant elasticity of subtitution* disingkat dengan CES dikembangkan oleh Arrow, Chenery, Minhan, dan Solow (1961). Elastisitas subtitusi adalah ukuran bagaimana perusahaan dengan mudah mensubtitusikan satu input dengan input lainnya untuk menjaga tingkat produksi pada level yang sama.

Model produksi CES didefinisikan sebagai berikut :

$$Y = \theta_1(\theta_2 x_1^{-\theta_3} + (1-\theta_2)x_2^{-\theta_3})^{\frac{\theta_4}{\theta_3}} \tag{2.2}$$

Dimana Y=output, x_1=input kapital, x_2=input tenaga kerja, dengan $\theta_1>0$, $0<\theta_2<1$, dan $\theta_3 \geq -1$ serta (x_1, x_2) merupakan input bivariat. θ_1 dinyatakan sebagai parameter efisiensi, θ_2 sebagai parameter distribusi, θ_3 sebagai parameter subtitusi, dan θ_4 sebagai parameter *return to scale*. Berikut model produksi CES dinyatakan dalam bentuk *logaritma natural*:

$$ln\, Y = ln\, \theta_1 + \frac{\theta_4}{\theta_3} ln(\theta_2 x_1^{-\theta_3} + (1-\theta_2)x_2^{-\theta_3}) \tag{2.3}$$

Dapat dilihat model produksi CES pada Persamaan 2.3 tidak dapat ditransformasi kedalam bentuk linear. Maka akan dilakukan pendugaan bagi parameter-

parameter dari model produksi CES. Pendugaan parameter akan dijelaskan pada subbab 2.3 Pendugaan Parameter.

2.3 Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter adalah proses untuk menduga atau menaksir parameter populasi yang tidak diketahui berdasarkan informasi dari sampel. Menurut Hoog dan Craig (1995), kriteria penduga yang baik adalah takbias, varians minimum, konsisten, statistik cukup dan kelengkapan. Berikut ini hanya akan dibahas dua kriteria penduga yang baik, yaitu takbias dan varians minimum karena dianggap sudah cukup untuk melihat suatu penduga yang baik.

1. **Takbias.** Suatu statistik dikatakan penduga tidak bias dari parameter θ apabila nilai harapan penduga sama dengan parameter θ, sebaliknya jika nilai harapan statistik tersebut tidak sama dengan parameter θ maka disebut penduga θ yang berbias.
2. **Varians Minimum.** Suatu penduga U(X) dikatakan mempunyai varians minimum apabila penduga tersebut memiliki varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisiens adalah penduga yang memiliki varians terkecil.

Dalam penelitian ini metode pendugaan yang digunakan untuk menduga model produksi CES adalah metode kuadrat terkecil nonlinear. Definisi metode kuadrat terkecil nonlinear akan dijelaskan pada subbab 2.4

2.4 Metode Pendugaan Kuadrat Terkecil Nonlinear (*Nonlinear Least Square Estimation*)

Misalkan model nonlinear yang dipostulat dengan bentuk :

$$Y = f\left(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{p}\right) + \varepsilon \tag{2.4}$$

misalkan $\mathbf{X} = \left(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{p}\right)`$

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p\right)`$$

maka Persamaan (2.3) dapat diringkas menjadi :

$$Y = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon \tag{2.5}$$

dengan asumsi $E(\varepsilon) = 0, Var(\varepsilon) = \sigma^2$ dan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ maka jumlah kuadrat galat untuk model nonlinear di atas didefinisikan sebagai berikut :

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\theta})\}^2 \tag{2.6}$$

Nilai dugaan kuadrat terkecil bagi $\boldsymbol{\theta}$ akan dilambangkan dengan $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$. Nilai dugaan ini adalah nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang meminimumkan $S(\boldsymbol{\theta})$. Untuk mendapatkan nilai dugaan kuadrat terkecil $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ yaitu dengan mendiferensialkan Persamaan (2.5) terhadap $\boldsymbol{\theta}$ kemudian disamadengankan nol. Ini akan menghasilkan Persamaan normal dengan bentuk :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{Y_i - f\left(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}^2 \left[\frac{\partial f\left(\xi, \widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \theta_i}\right] = 0 \tag{2.7}$$

Persamaan (2.6) disebut Persamaan normal untuk model nonlinear. Kebanyakan model nonlinear tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka diperlukan metode iterasi. Salah satu cara yang digunakan adalah dengan teknik iteratif yaitu metode Newton Raphson. Metode ini sederhana dan mempunyai konvergensi yang cepat. Subbab 2.5 akan menjelaskan tentang metode Newton-Raphson.

2.5 Metode Newton Rapshon

Apabila dalam proses pendugaan parameter didapat persamaan akhir yang non linear maka tidak mudah memperoleh pendugaan parameter tersebut, sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk memecahkan persamaan nonlinear tersebut. Salah satu metode yang sangat popular digunakan untuk memecahkan sistem persamaan non linear adalah metode Newton Raphson. Metode Newton Raphson adalah metode untuk menyelesaikan persamaan nonlinear secara iteratif.

Jika $\theta_0$merupakan nilai awal dari θ atau θ_0 merupakan nilai ke-1 dari θ, maka dapat dimisalkan $\theta_0 = \theta_i$ dan $\theta = \theta_{i+1}$ dengan i awal = 0.

Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan lebih dari satu parameter. Misal $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ maka iterasinya sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_i - [\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{g}]$$

Vektor gradien atau vektor turunan pertama jumlah kuadrat terhadap parameter-parameter dan dilambangkan dengan $g(\theta)$ yaitu :

$$g() = \frac{\partial S()}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S()}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial S()}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial S()}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

Matriks Hessian atau matriks turunan kedua dari jumlah kuadrat terhadap masing-masing parameter, dilambangkan dengan $H(\theta)$ yaitu :

$$H() = \frac{\partial^2 S()}{\partial\theta\partial\theta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S()}{\partial{\theta_1}^2} & \frac{\partial^2 S()}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 S()}{\partial\theta_1\partial\theta_n} \\ \frac{\partial^2 S()}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 S()}{\partial{\theta_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 S()}{\partial\theta_2\partial\theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S()}{\partial\theta_n\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 S()}{\partial\theta_n\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 S()}{\partial{\theta_n}^2} \end{bmatrix}$$

(Seber and Wild, 2003).

Untuk memudahkan melakukan iterasi dengan metode Newton-Raphson pada penelitian ini peneliti menggunakan *software* SAS. Pada metode Newton Rapshon dengan menggunakan SAS diperlukan nilai awal paramater. Nilai awal bisa dilakukan secara *trial and error* atau dengan menggunakan nilai awal grid/interval. Penentuan nilai grid berdasarkan nilai parameter yang mungkin dari suatu model. Dari hasil yang diperoleh yang digunakan sebagai nilai awal untuk menduga parameter adalah nilai dengan jumlah kuadrat paling kecil. Karena nilai dengan jumlah kuadrat paling kecil mengindikasikan bahwa proses iterasi yang akan dilakukan mendekati konvergen.