II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi

2.1.1 Pengertian

Sebuah fungsi adalah suatu kaidah yang menghasilkan korespondensi di antara dua himpunan. Jika pada setiap nilai yang dapat diambil oleh sebuah variabel x terdapat satu atau lebih nilai variabel y, maka kita menamakan y sebuah fungsi dari x dan kita menuliskan $u = f(x), y = G(x)$, … dengan huruf-huruf f, G, … yang menyimbolkan fungsi sedangkan $f(a)$, $G(a)$, … menyatakan nilai fungsi pada $x = a$.

Himpunan nilai-nilai yang dapat diambil oleh x dinamakan daerah asal dari definisi (*comain of definition*) atau dinamakan saja daerah asal fungsi: x dinamakan variabel bebas (*independent variable*) dan y dinamakan variabel tak bebas (*dependent variable*). Jika hanya satu nilai y yang bersesuaian dengan setiap nilai x di dalam daerah asal dari definisi tersebut, maka fungsi tersebut dinamakan bernilai tunggal (*single valued*). Jika lebih dari satu nilai y yang bersesuaian dengan beberapa nilai x, maka fungsi tersebut dinamakan bernilai rangkap (*multiple valued*). Karena sebuah fungsi bernilai rangkap dapat ditinjau sebagai sebuah kumpulan fungsi-fungsi bernilai tunggal, maka kita akan menganggap fungsi-fungsi sebagai yang bernilai tunggal kecuali jika ditunjukkan mempunyai sifat lain.

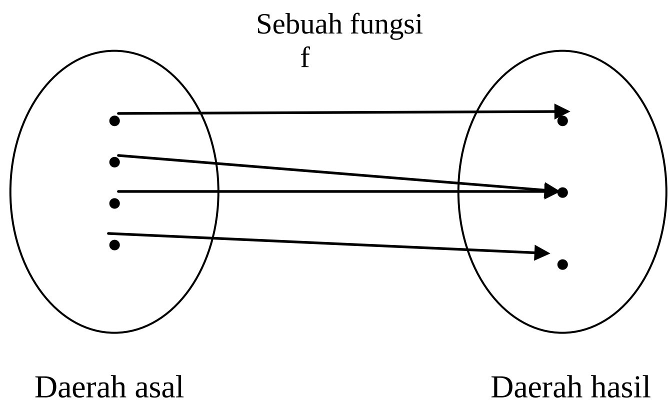
Contoh :

Jika pada setiap bilangan di dalam $-1 \leq x \leq 1$ kita mengasosiasikan sebuah bilangan y yang diberikan oleh x^2. Maka korespondensi di antara x dan x^2 akan mendefinisikan sebuah fungsi f yang bernilai tunggal.

Jawab : Daerah asal f adalah $-1 \leq x \leq 1$. Nilai f di x diberikan oleh y = f(x) = x^2 misalnya, $f(-1) = (-1)^2 = 1$ adalah nilai fungsi di x = -1.

2.1.2 Definisi

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi.



(Purcell, 2003)

2.2 Grafik Fungsi

Bilamana daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan himpunan bilangan real, dan dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat. Dan grafik fungsi f adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$.

Contoh 1 : Buatlah sketsa grafik dari $f(x) = x^2 - 2$

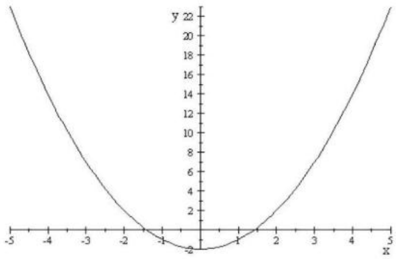
Penyelesaian :

$f(x) = x^2 - 2$

Daerah asal $\{x|x \in R\}$

Daerah Hasil $\{y|y \in R; y \geq -2\}$

Grafiknya :

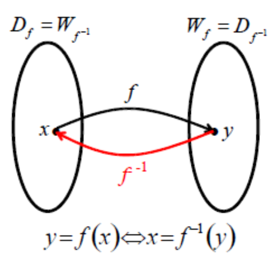


2.3 Fungsi Invers

Misalkan f fungsi 1-1 dengan daerah asal D_f dan daerah hasil (wilayah) W_f. Fungsi invers f adalah f^{-1} yang bersifat

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Dengan $D_{f^{-1}} = W_f, W_{f^{-1}} = D_f$.



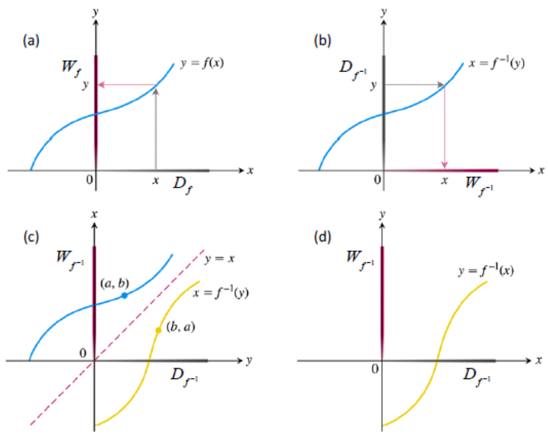
Penentuan Fungsi Invers

Langkah Aljabar

Misalkan f fungsi 1-1, dengan $y = f(x)$. Untuk memperoleh f^{-1}.

1. Tuliskan $y = f(x)$, gambar (a),(b).
2. Nyatakan x dalam $y\left(x = f^{-1}(y)\right)$, gambar (c).
3. Tukar x dan y sehingga diperoleh $y = f^{-1}(x)$, gambar (d).

Ilustrasi Geometris



Sifat-sifat fungsi invers :

1. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$
2. $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = \mathrm{I}(x) = x$, I = fungsi identitas
3. $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Mencari fungsi invers

1. Nyatakan persamaan fungsinya $y = f(x)$
2. Carilah x dalam y, namai persamaan ini dengan $x = f^{-1}(y)$
3. Ganti x dengan y dan y dengan x, sehingga menjadi $y = f^{-1}(x)$, yang merupakan fungsi invers dari f.

(Kartono, 1999)

2.4 Limit

Teorema

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

Jika limit kiri dan limit kanan tidak sama, maka nilai limitnya tidak ada.

Hasil limit tidak boleh bentuk tak tentu :

$$\left(\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0.\infty; 0^0; 1^\infty; \infty - \infty\right)$$

Sifat-sifat Limit

1. $\lim_{x \to a} k = k$
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
3. $\lim_{x \to a} k \,.\, f(x) = k \,.\, \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \{f(x). g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x)$
6. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$; untuk $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$

Contoh :

Diketahui $f(x) = 2x - 5$ dan $g(x) = 3x^2 + 4x$. Tentukan :

1. $\lim_{x \to 3} f(x) + \lim_{x \to 3} g(x)$
2. $\lim_{x \to 3} \{f(x) + g(x)\}$

Penyelesaian

1. $\lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}(2x-5) + \lim_{x\to 3}(3x^2+4x)$

$$= 2\,.\,3 - 5 + 3\,.\,3^2 + 4\,.\,3$$

$$= 6 - 5 + 3\,.\,9 + 12$$

$$= 1 + 27 + 12$$

$$= 40$$

2. $\lim_{x\to 3}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to 3}\{(2x-5) + (3x^2+4x)\}$

$$= \lim_{x\to 3}(3x^2 + 6x - 5)$$

$$= 3\,.\,3^2 + 6\,.\,3 - 5$$

$$= 3\,.\,9 + 18 - 5$$

$$= 27 + 18 - 5$$

$$= 40$$

(Purcell, 2003)

2.5 Turunan

Definisi

Turunan fungsi f adalah fungsi f' yang nilainya di c adalah

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan limit ini ada.

Sifat-sifat Turunan

Jika k suatu konstanta, f dan g fungsi-fungsi yang terdeferensialkan, u dan v fungsi-fungsi dalam x sehingga $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ maka berlaku :

1. Jika $y = ku$ maka $y' = k(u')$
2. Jika $y = u + v$ maka $y' = u' + v'$
3. Jika $y = u - v$ maka $y' = u' - v'$
4. Jika $y = uv$ maka $y' = u'v + uv'$
5. Jika $y = \frac{u}{v}$ maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

(Purcell, 2003)

2.6 Definisi *Supply and Demand*

1. *Supply* (Penawaran)

Supply (Penawaran) adalah banyaknya barang yang ditawarkan oleh penjual pada suatu pasar tertentu, pada periode tertentu, dan pada tingkat harga tertentu. Dalam teori ekonomi, *supply* (Penawaran) didefinisikan sebagai hubungan statis yang menunjukkan berapa banyak suatu komoditas akan ditawarkan pada suatu tempat dan waktu tertentu. (Tomek and Robinson, 1981).

Kurva penawaran menunjukkan hubungan yang positif antara jumlah komoditas yang akan dijual dengan tingkat harga dari komoditas tersebut (Lantican, 1990).

2. *Demand* (Permintaan)

Demand (Permintaan) adalah banyaknya jumlah barang yang diminta pada suatu pasar tertentu dengan tingkat harga tertentu pada tingkat pendapatan tertentu dan dalam periode tertentu. Permintaan adalah kuantitas suatu komoditas yang mampu dan ingin dibeli oleh konsumen pada suatu tempat dan waktu tertentu pada berbagai tingkat harga (Tomek and Robinson, 1981).

Seperti halnya penawaran, permintaan juga dapat diekspresikan dalam bentuk fungsi matematis, dimana permintaan merupakan fungsi dari berbagai faktor seperti permintaan tahun sebelumnya, harga barang, dan sebagainya. Permintaan tahun sebelumnya mempengaruhi permintaan tahun ini sebagai akibat dari pembentukan kebiasaan atau *habits formation* (Wohlgenant and Hahn, 1982).

2.7 Laju Perubahan

1. Laju Perubahan Rata-rata

   Laju perubahan rata-rata fungsi $y = f(x)$ dalam selang tertutup $[x_1, x_2]$ ialah :

$$\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. Laju Perubahan Sesaat.

   Misalkan fungsi $y = f(x)$ didefinisikan di sekitar $x = c$. Yang dimaksud dengan laju perubahan sesaat pada $x = c$ ialah :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$, asalkan limitnya ada.

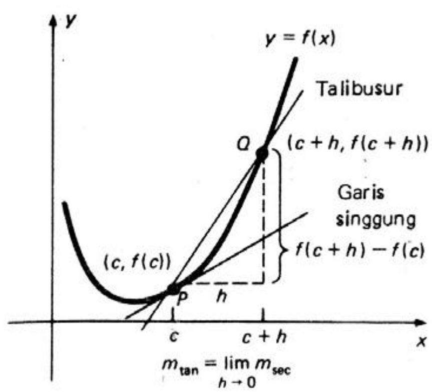
   Bahwa $\Delta\, x = x - c$. Dengan demikian jika $\Delta\, x = 0$, maka $x = c$. Oleh karena itu :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

3. Garis Singgung

   Gagasan garis singgung dari Euclides sebagai suatu garis yang memotong suatu kurva pada satu titik tetapi sama sekali tidak memuaskan untuk kebanyakan kurva-kurva lain. Gagasan bahwa garis singgung pada suatu kurva di P adalah garis yang paling menghampiri kurva dekat P adalah lebih baik, tetapi masih tetap terlalu samar-samar untuk ketak-samaan matematis. Konsep limit menyediakan suatu cara mendapatkan uraian terbaik. Andaikan P adalah suatu titik tetap pada sebuah kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Garis yang melalui P dan Q, disebut talibusur. Garis singgung di P adalah posisi pembatas (jika ada) dari talibusur itu bila Q bergerak ke arah P sepanjang kurva. Andaikan kurva tersebut adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$. Maka P mempunyai koordinat $(c, f(c))$, titik Q di dekatnya mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$, dan talibusur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan m_{sec}yang diberikan oleh (lihat Gambar):

$$m_{sec} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$



Akibatnya, garis singgung jika tidak tegaklurus adalah garis yang melalui P dengan kemiringan m_{tan} yang memenuhi :

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} m_{sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

(Kartono, 1999)