II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa definisi yang berhubungan dengan penelitian mengenai pendekatan Distribusi $F(r_1, r_2)$ dengan Distribusi *Generalized Log-Logistic* $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ melalui fungsi pembangkit momen-nya.

2.1 Distribusi F

Distribusi F dikenal dengan sebutan Distribusi F *Snedecor* atau Distribusi *Fisher-Snedecor* (dinamakan mengikuti Sir Ronald Aylmer Fisher (17 Februari 1890 – 29 Juli 1962) dan George W. Snedecor merupakan pakar statistika, pertanian eksperimental, dan genetika kuantitatif asal Inggris).

Distribusi Probabilitas F diturunkan dari Distribusi Probabilitas Normal Baku melalui Distribusi Khi-Kuadrat. Distribusi Probabilitas F merupakan perbandingan dua Distribusi Khi-Kuadrat dalam bentuk

$$F = \frac{\frac{U}{r_1}}{\frac{V}{r_2}}$$

Pada Distribusi Probabilitas F terdapat dua derajat kebebasan yakni derajat kebebasan pembilang r_1 (atas) dan derajat kebebasan penyebut r_2 (bawah).

Suatu peubah acak dikatakan memiliki distribusi F (dinamakan mengikuti R.A. Fisher) dengan r_1 dan r_2 derajat kebebasan jika fungsi kepekatannnya ditentukan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)}{\Gamma\frac{r_1}{2}\Gamma\frac{r_2}{2}}\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} \dfrac{x^{\frac{r_1}{2}-1}}{\left(1+x\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1+r_2}{2}}} & ;\text{ untuk } 0 < x < \infty \\ 0 & ;\ x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Peubah acak X yang berdistribusi F dengan derajat kebebasan pembilang = r_1 dan derajat kebebasan penyebut = r_2 dapat ditulis sebagai berikut:

$$X \sim F(r_1, r_2)$$

(Hogg and Craig, 1995).

Adapun ciri-ciri dari distribusi F adalah:

1. Distribusi F bersifat kontinu. Hal ini berarti bahwa Distribusi F nilainya bisa jadi tidak terbatas, antara nol dan positif tak hingga.
2. Distribusi F tidak dapat bernilai negatif. Nilai terkecil dari F adalah 0.
3. Bentuknya tidak simetri. Semakin besar jumlah derajat kebebasan pada pembilang dan penyebut, distribusinya semakin mendekati Distribusi Normal.
4. Bersifat asimtotik *(asymptotic)*. Semakin besar nilai X, kurva F semakin mendekati sumbu X tetapi tidak akan pernah sampai menyentuhnya.

(Douglas, et. al., 2008).

2.2 Distribusi *Generalized Log-Logistic*

Distribusi *Generalized Log-Logistic* (GLL) merupakan salah satu distribusi umum yang memiliki potensi cukup baik untuk pencocokan data kelangsungan hidup. Distribusi GLL merupakan perluasan dari Distribusi Log-Logistik dengan menambahkan dua parameter bentuk (m_1, m_2).

Suatu peubah acak X dikatakan berdistribusi GLL dengan parameter $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ atau dapat dinotasikan sebagai $X \sim \text{GLL}(\alpha, \beta, m_1, m_2)$, dengan α sebagai parameter lokasi (*threshold*) yang menunjukkan lokasi waktu, dimana pada saat waktu tersebut, belum ada obyek pengamatan yang mati/rusak/gagal.

Sedangkan β sebagai parameter skala yang menyatakan besarnya keragaman data berdistribusi $\text{GLL}(m_1, m_2)$.

Dalam Warsono (2010), fungsi kepekatan peluang dari Distribusi GLL dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$g(x\colon \alpha, \beta, m_1, m_2) = \left(\frac{\alpha}{xB(m_1, m_2)}\right)[F(x)]^{m_1}[1 - F(x)]^{m_2}$$

untuk $\alpha \geq 0$ dan $\beta, m_1, m_2, x > 0$,

dengan $F(x) = \frac{1}{\left(1+e^{-(\beta+\alpha \ln x)}\right)}$ adalah Fungsi Distribusi Log-Logistik.

Dengan memisalkan w sebagai peubah acak baru yang merupakan Fungsi Distribusi Log-Logistik, maka didapatkan fungsi distribusi dari Distribusi *Generalized Log-Logistic* sebagai berikut:

$w = F(x) = \frac{1}{\left(1+e^{-(\beta+\alpha \ln x)}\right)}$ dan $dw = \left(\frac{\alpha}{x}\right) \frac{e^{-(\beta+\alpha \ln x)}}{\left(1+e^{-(\beta+\alpha \ln x)}\right)^2} dx$ maka Fungsi Distribusi dari GLL$(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ adalah:

$$G(x) = \frac{1}{B(m_1, m_2)} \int_0^{F(x)} w^{m_1-1}(1-w)^{m_2-1} dw$$

dengan:

x = peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu rusak/ gagal.

$B(m_1, m_2)$ = Fungsi Beta lengkap.

α = parameter lokasi yang menunjukkan lokasi waktu, dimana pada lokasi waktu tersebut belum ada obyek pengamatan yang rusak/ gagal.

β = parameter skala yang menunjukkan besarnya keragaman data Distribusi GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$.

(m_1, m_2) = parameter bentuk yang menunjukkan laju kerusakan/ kegagalan data Distribusi GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$.

Jika $m_1 = m_2$, Distribusi GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ merupakan Distribusi *Log-Logistic*.

Jika $m_1 > m_2$, GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ berdistribusi melenceng ke arah positif.

Jika $m_1 < m_2$, GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ berdistribusi melenceng ke arah negatif.

2.3 Ekspansi Deret Maclaurin

Suatu fungsi $f(x)$ dan turunannya, $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ kontinu dalam interval I dan $x, a \in$ I, maka untuk x di sekitar a, yaitu $|x-a| < R, f(x)$ dapat diekspansikan sebagai sebuah Deret Taylor (berbentuk polinom), yaitu:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ \dots \qquad (2.1)$$

Untuk $a = 0$, maka Persamaan (2.1) menjadi:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ \dots \qquad (2.2)$$

Persamaan (2.2) di atas, disebut Deret Maclaurin bagi fungsi $f(x)$.

Dengan menggunakan Persamaan (2.2), maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$$f(x) = e^{tx} \longrightarrow f(0) = e^{t(0)} = 1$$

$$f'(x) = t\, e^{tx} \longrightarrow f'(0) = t\, e^{t(0)} = t$$

$$f''(x) = t^2\, e^{tx} \longrightarrow f''(0) = t^2\, e^{t(0)} = t^2$$

Sehingga diperoleh:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!} x^2 + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} x^n \qquad (2.3)$$

(Purcell, et. al., 2003).

2.4 Fungsi Gamma

Fungsi Gamma didefinisikan untuk semua bilangan kompleks, kecuali bilangan bulat negatif dan nol. Untuk bilangan kompleks yang bagian realnya positif, Fungsi Gamma didefinisikan untuk $\alpha > 0$, Fungsi Gamma adalah:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \tag{2.4}$$

2.5 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari peubah acak X, untuk X diskrit adalah

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

dan jika X kontinu

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

(Miller and Miller, 1999).

Fungsi pembangkit momen hanya ada, jika jumlah atau integral pada definisi di atas konvergen. Jika fungsi pembangkit momen suatu peubah acak memang ada, maka fungsi itu dapat dipakai untuk membangkitkan atau menemukan seluruh momen peubah acak tersebut.

Teorema Ketunggalan:

i. Bila dua fungsi pembangkit momen dari dua peubah acak ada dan sama, maka kedua peubah acak tersebut mempunyai fungsi distribusi yang sama.
ii. Bila dua peubah acak mempunyai fungsi distribusi yang sama, maka (bila ada) fungsi pembangkit momennya juga sama.

(Dudewicz and Mishra, 1995)

2.6 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi *Genaralized Log-Logistic*

Misalkan suatu peubah acak X berdistribusi $GLL(\alpha, \beta, m_1, m_2)$, maka fungsi pembangkit momen dari peubah acak X adalah sebagai berikut:

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(te^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(m_1 + \frac{n}{\alpha}\right)\Gamma\left(m_2 - \frac{n}{\alpha}\right)}{\Gamma m_1 \Gamma \mathrm{m}_2} \tag{2.5}$$

(Warsono, 2010).

2.7 Pendekatan Dengan Teknik Fungsi Pembangkit Momen

Misalkan peubah acak X_n memiliki fungsi distribusi $F_n(x)$ dan fungsi pembangkit momen $M(t; n)$ yang terdefinisi untuk $-h < t < h$ untuk semua n. Jika terdapat suatu fungsi distribusi $F(x)$, yang berkorespondensi dengan fungsi pembangkit momen $M(t)$, terdefinisi untuk $|t| \leq h_1 < h$, sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} M(t; n) = M(t)$, maka X_n memiliki distribusi limit dengan fungsi distribusi $F(x)$ (Hogg and Craig, 1995).