II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Fungsi Kelangsungan Hidup

Misalkan X adalah peubah acak kontinu yang menyatakan usia kematian dari seseorang yang baru dilahirkan, dan X memiliki fungsi distribusi $F_x(x)$

$$F_x(x) = \Pr(X \leq x) \qquad x \geq 0, \qquad (2.1.1)$$

maka,

$$S(x) = 1 - F_x(x) = \Pr(X > x) \qquad x \geq 0 \qquad (2.1.2)$$

Jika diasumsikan $F(0) = 0$, yang berarti $S(0) = 1$. Fungsi s(x) dapat disebut fungsi kelangsungan hidup. S(x) dapat diartikan sebagai peluang seseorang yang baru lahir (berusia 0 tahun) akan bertahan hidup sampai pada usia ke-x. Dalam ilmu aktuaria dan demografi, fungsi kelangsungan hidup s(x) digunakan sebagai langkah awal perhitungan-perhitungan yang dilakukan. Seperti untuk menentukan peluang seseorang berusia x akan tetap hidup atau peluang seseorang berusia x akan meninggal pada suatu selang waktu tertentu.

Dengan menggunakan hukum distribusi peluang, kita dapat menentukan peluang seseorang akan meninggal. Sebagai contoh, peluang seseorang yang baru lahir akan meninggal diantara usia x dan z $(x < z)$ dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\Pr(x < X < z) = F_x(z) - F_x(x)$$

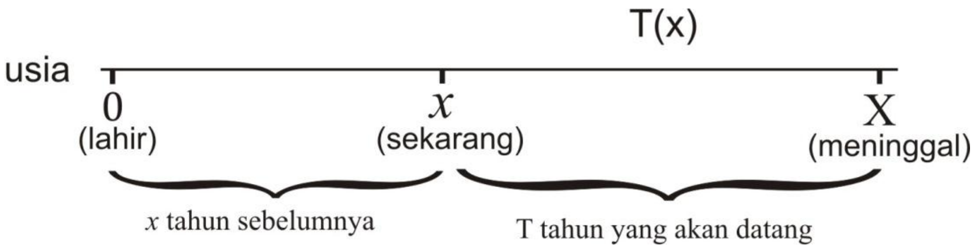
$$= s(x) - s(z) \qquad (2.1.3)$$

(Bowers, dkk., 1997)

2.2. Waktu Sisa Hidup

Fungsi waktu sisa hidup dilambangkan dengan peubah acak kontinu $T(x)$, yaitu dimana seseorang yang berusia x yang dilambangkan dengan (x) akan meninggal pada usia X. Dapat dinyatakan sebagai

$$T(x) = X - x \qquad (2.2.1)$$



Gambar 2.1. Grafik Waktu Sisa Hidup $T(x)$

Dengan notasi peluangnya

$${}_tq_x = P(T(x) \leq t\ ) \qquad t \geq 0, \qquad (2.2.2)$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T(x) > t) \qquad t \geq 0. \qquad (2.2.3)$$

Maka fungsi distribusi dari $T(x)$ yaitu

$$F_{T(x)}(x) = P(T(x) \leq t\ |X > x)$$

$$= P(X - x \leq t|X > x)$$

$$= P(x < X < x + t|X > x$$

$$= \frac{P(X \leq x + t) - P(X \leq x)}{P(X \leq x)}$$

$$= \frac{F_x(x+t) - F_x(x)}{1 - F_x}$$

$$= \frac{\left(1 - s(x+t)\right) - (1 - s(x))}{s(x)}$$

$$= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}$$

$$= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$F_{T(x)}(x) = \ {}_tq_x \qquad (2.2.4)$$

maka,

$$P(T(x) > t) = 1 - P(T(x) \leq t)$$

$$= 1 - (1 - \frac{s(x+t)}{s(x)})$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$= \ {}_tp_x \qquad (2.2.5)$$

Dalam ilmu aktuaria, ${}_tq_x$ dapat dinyatakan sebagai peluang orang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum usia $x + t$ tahun. Sedangkan ${}_tp_x$ adalah peluang seseorang yang berusia x tahun akan hidup hingga $x + t$ tahun. Jika $x = 0$ dan $t = x$ maka $T(0) = X$ dan

$${}_xp_0 = s(x) \qquad x \geq 0 \qquad (2.2.6)$$

Selain itu, terdapat juga istilah lain dimana seseorang yang berusia x akan bertahan sampai t tahun dan akan meninggal pada u-tahun berikutnya. Dapat dinyatakan sebagai seseorang yang berusia x akan meninggal pada umur antara $x + t$ sampai $x + t + u$. Fungsi peluangnya adalah

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= P(t < T(x) \le t+u) \\
&= P(T(x) \le t+u) - P(T(x) \le t) \\
&= {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x \\
&= \frac{(1 - s(x+t+u))}{s(x)} - \frac{(1 - s(x+t))}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)}\frac{s(x+t)}{s(x+t)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)}\frac{s(x+t)}{s(x+t)} \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)}(1 - \frac{s(x+t+u)}{s(x+t)}) \\
&= {}_{t}p_x(1 - {}_{u}p_{x+t}) \\
&= {}_{t}p_x\, {}_{u}q_{x+t} \qquad (2.2.7)
\end{aligned}
$$

Dalam kasus diskret, peluang meninggal sering disebut *curtate future life time*, dengan simbol $K(x)$. Secara teori, definisi dari peubah acak $K(x)$ adalah $K(x) = [T(x)]$, dengan simbol $[T(x)]$ yang menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan dari $T(x)$. Adapun secara informal $K(x)$ menyatakan berapa kali lagi ulang tahun yang dapat dirayakan oleh (x) sebelum ia meninggal dunia atau peubah acak diskret yang menyatakan lamanya hidup (x).

$K(x)$ adalah variabel acak diskret dengan fungsi distribusi yang dinyatakan dengan :

$$
\begin{aligned}
P(K(x) = k) &= P(K = k) \\
&= P([T(x)] = k)
\end{aligned}
$$

$$= P(k < T(x) \leq k+1)$$

$$= F(k+1) - F(k)$$

$$= {}_{k+1}q_x - {}_{k}q_x$$

$$= {}_{k}p_x \, . (1 - {}_{k+1}p_x)$$

$$= {}_{k}p_x \, . \, q_{x+k}$$

$$= {}_{k|}q_x \qquad ; \text{k=0,1,2,3,.} \qquad (2.2.8)$$

2.3. Percepatan Mortalita

Sebuah analogi dari fungsi ini untuk kematian seketika dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi kepekatan peluang kematian pada saat usia seseorang mencapai x. Dengan menggunakan fungsi distribusi dari $T(x)$ dimana seseorang akan meninggal diantara usia x sampai $x + \Delta x$,

$$P(x < X < x + \Delta x) = \frac{F_x(x + \Delta x) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} \qquad (2.3.1)$$

Jika (2.3.1) dinyatakan di dalam fungsi limit maka :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x + \Delta x) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} (F_x(x + \Delta x) - F_x(x)) \frac{\Delta x}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F_x(x)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x + \Delta x) - F_x(x)}{\Delta x} . \Delta x}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F_x(x)}$$

$$\cong \frac{f_x(x)\Delta x}{1 - F_x(x)}$$

$$\cong \frac{f_x(x)}{1 - F_x(x)} \qquad (2.3.2)$$

Maka, dari fungsi peluang tersebut dapat dibentuk rumus survival yang dinotasikan dengan $\mu(x)$

$$\mu(x) = \frac{f_x(x)}{1 - F_x(x)}$$

$$= \frac{-s'(x)}{s(x)} \qquad (2.3.3)$$

Pada ilmu aktuaria dan demografi, $\mu(x)$ adalah percepatan mortalita. Dalam teori reabilitas, pembelajaran mengenai peluang kelangsungan hidup dari bagian produksi dan sistem, $\mu(x)$ disebut dengan tingkat kegagalan (*failure rate*) atau tingkat bahaya (*hazard rate*).

Selanjutnya, dapat ditentukan laju kematian pada usia x yaitu

$$\mu(x) = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \frac{-1}{s(x)} . \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln\ s(x)}{ds(x)} . \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln\ s(x)}{d(x)}$$

$$\mu(x)dx = -d \ln s(x)$$

dengan mengganti x menjadi y, maka diperoleh:

$$\mu(y)dy = -d \ln s(y) \qquad (2.3.4)$$

persamaan (2.3.4) diintegralkan pada batas x sampai $x + t$ maka diperoleh:

$$\int_x^{x+t} \mu(y)dy = -\int_x^{x+t} d \ln s(y)$$

$$= -\ln s(y) \Big|_{x}^{x+t}$$

$$= -(\ln s(x+t) - \ln s(x))$$

$$= -\ln \left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\ln \ {}_t p_x$$

$${}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(y)dy} \qquad (2.3.5)$$

Secara khusus, jika usia dimulai dari 0 dan waktu kelangsungan hidup dengan x, maka diperoleh :

$$s(x) = {}_x p_0 = e^{-\int_0^{x} \mu(y)dy} \qquad (2.3.6)$$

Diketahui dari (2.2.4) fungsi distribusi dari $T(x)$ adalah $F_{T(x)}(t) = {}_t q_x$, sehingga

$$f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt} \ {}_t q_x$$

$$= \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\frac{s'(x+t)}{s(x)}$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)} . -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}$$

$$f_{T(x)}(t) = {}_t p_x . \mu(x+t) \quad ; \ t \geq 0 \qquad (2.3.7)$$

(Bowers, dkk.,1997)

2.4. Tabel Mortalitas

Tabel mortalitas adalah cara ringkas untuk menunjukkan probabilitas dari anggota pada suatu populasi yang hidup atau mati pada usia tertentu. Tabel mortalitas (*life* *tables*) digunakan untuk memeriksa perubahan kematian dari populasi jaminan sosial dari waktu ke waktu (Bell dan Miller, 2005).

Jika suatu kelompok/populasi bayi yang baru lahir yang dilambangkan dengan l_0 adalah sebanyak 100.000, maka masing-masing bayi yang baru lahir tersebut mempunyai fungsi survival yang sama dengan $s(x)$. Jika $\psi(x)$ menyatakan banyaknya bayi yang hidup sampai usia x. dengan $j = 1,2, \dots, l_0$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

dimana I_j adalah indikator untuk kelangsungan kehidupan j , maka

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{jika bayi j hidup sampai usia ke} - \text{x} \\ 0 & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Jika dihitung ekspektasi dari I_j, maka

$$E[I_j] = \sum_{I_j=0}^{1} I_j \,.\, P(I_j)$$

$$= 1.\, s(x) + 0.\left(1 - s(x)\right)$$

$$E[I_j] = s(x)$$

selanjutnya, akan dihitung ekspektasi dari $\psi(x)$

$$E[\psi(x)] = E[\sum_{j=1}^{l_0} I_j]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j]$$

$$= \underbrace{s(x) + s(x) + \cdots + s(x)}_{\text{sebanyak } l_0 \text{ kali}}$$

$$E[\psi(x)] \; = l_0 . s(x)$$

Definisi lain dari $E[\psi(x)]$ adalah l_x yaitu ekspektasi jumlah yang bertahan hidup pada saat usia ke-x dari jumlah l_0 yang baru lahir, maka

$$l_x = l_0 . s(x) \tag{2.4.1}$$

Dengan cara yang sama, banyaknya yang meninggal di antara usia x sampai dengan $x + n$ dilambangkan dengan ${}_n\mathfrak{D}_x$ atau

$${}_n\mathfrak{D}_x = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

dimana I_j adalah indikator untuk kematian j , maka

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{jika j meninggal antara usia x sampai x + n tahun} \\ 0 & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Peluang kematian diantara usia x sampai dengan usia $x + n$ adalah $s(x) - s(x + n)$, Maka dapat diperoleh ekspektasi dari I_j, yaitu

$$E[I_j] = 1. [s(x) - s(x + n)] + 0. \left[1 - \left(s(x) - s(x + n)\right)\right]$$

$$E[I_j] = s(x) - s(x + n)$$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan nilai harapan dari ${}_n\mathfrak{D}_x$ yang disimbolkan dengan ${}_nd_x$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}_nd_x = E[{}_n\mathfrak{D}_x] &= E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] \\ &= l_0 . [s(x) - s(x + n)] \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Dimana ${}_{n}d_{x}$ menyatakan banyaknya orang yang berusia x tahun meninggal sebelum mencapai usia $x+n$ tahun (Bowers, dkk.,1997).

Peluang seseorang berusia x akan hidup (paling sedikit) n tahun yang dinyatakan dengan ${}_{n}p_{x}$ yaitu

$$ {}_{n}p_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} \tag{2.4.3} $$

Dengan kata lain, ${}_{n}p_{x}$ adalah jumlah orang (dari sebanyak l_x pada usia x) yang mencapai usia $x+n$ (l_{x+n}) dibagi jumlah orang pada usia x. Bila $n=1$, imbuhan n sebelah kiri tidak perlu ditulis, jadi ${}_{1}p_{x} = p_{x}$ atau $p_{x} = \frac{l_{x+1}}{l_{x}}$. ${}_{n}q_{x}$ menyatakan peluang seseorang berusia x akan meninggal dalam n tahun, atau sebelum mencapai usia $n+x$

$$ \begin{aligned} {}_{n}q_{x} &= 1 - {}_{n}p_{x} \\ &= 1 - \frac{l_{x+n}}{l_{x}} \\ &= \frac{l_{x} - l_{x+n}}{l_{x}} \end{aligned} \tag{2.4.4} $$

Bila $n=1$, imbuhan n sebelah kiri tidak perlu ditulis, ${}_{1}q_{x} = q_{x} = 1 - p_{x}$. Selain itu, jumlah orang yang meninggal antara usia x dan $x+n$ dilambangkan dengan ${}_{n}d_{x}$ yaitu

$$ {}_{n}d_{x} = l_{x} - l_{x+n} \tag{2.4.5} $$

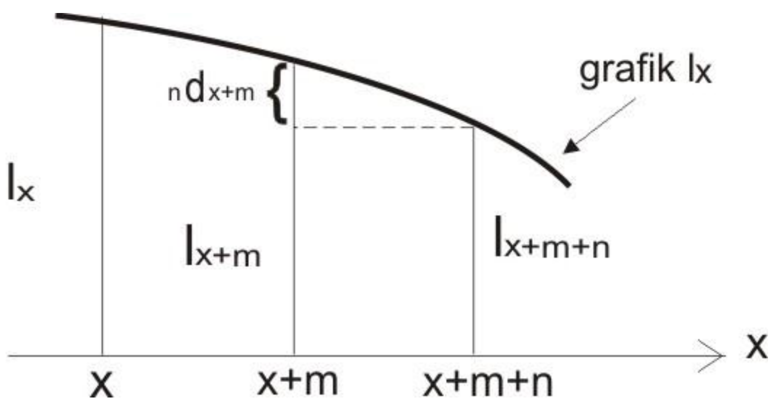
$$ {}_{n}q_{x} = \frac{{}_{n}d_{x}}{l_{x}} \tag{2.4.6} $$

${}_{m|n}q_x$ menyatakan peluang seseorang yang berusia x akan hidup m tahun, tetapi meninggal dalam n tahun kemudian, yaitu meninggal antara usia $x + m$ dan $x + m + n$ tahun.

$$ {}_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} $$

$$ = \frac{{}_nd_{x+m}}{l_x} \quad (2.4.7) $$

Seperti yang digambarkan pada grafik berikut ini



Gambar 2.2. Grafik l_x Tabel Mortalita

(Sembiring, 1986).

2.5. Hukum Mortalita

Terdapat tiga pembenaran utama untuk mendalilkan bentuk analitik mortalitas atau fungsi survival. Yang pertama adalah filosofis. Banyak fenomena yang dipelajari di fisika dapat dinyatakan dengan rumus sederhana. Beberapa penulis menyarankan bahwa kelangsungan hidup manusia dapat diatur dengan menggunakan hukum persamaan sederhana. Pembenaran yang kedua, yaitu sesuatu yang praktis. Lebih mudah untuk menyatakan fungsi dengan beberapa parameter daripada harus menyatakan tabel mortalitas dengan kemungkinan 100 parameter atau peluang mortalitasnya. Pembenaran ketiga, untuk fungsi analitik sederhana survival adalah lebih mudah untuk mengestimasi beberapa parameter dari suatu fungsi data mortalitas (Bowers, dkk., 1997). Artinya, pendekatan dengan hukum mortalita digunakan karena hukum mortalita memiliki formula sederhana yang dapat menjelaskan fenomena yang terjadi secara efisien, praktis, dan cenderung lebih mudah untuk mengestimasi beberapa parameter fungsi dari data mortalita.

Terdapat beberapa hukum mortalita yang terkenal yaitu hukum mortalita De Moivre (1724), Gompertz (1825), Makeham (1860), dan Weibull (1939). Dari beberapa hukum mortalita tersebut, yang akan digunakan yaitu hukum mortalita Gompertz dan Makeham.

2.6. Distribusi Gompertz

Distribusi Gompertz sangat sering digunakan untuk mendeskripsikan suatu distribusi kematian. Pada tingkat terendah kematian pada bayi dan anak-anak, penggambaran percepatan mortalita Gompertz meluas sampai rentang seumur hidup pada suatu populasi tanpa mengamati perlambatan pola kematian. Maka, percepatan mortalita dari distribusi Gompertz yaitu

$$\mu_x = Bc^x \qquad (2.6.1)$$

Dimana $B > 0$, $c > 1$, $x \geq 0$ (Jordan, 1991).

Dari (2.3.6) fungsi survival distribusi Gompertz dapat didefinisikan

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu(x)\, dx\right)$$

$$= \exp(-\int_0^x Bc^x\, dx)$$

$$= \exp(-B.\left(\frac{1}{\ln c}\ c^x\right))\Big|_0^x$$

$$s(x) = \exp(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)) \qquad (2.6.2)$$

Dari fungsi survivalnya, dapat ditentukan fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*) dari distribusi Gompertz yaitu :

$$F(x) = 1 - s(x) = \left(1 - \exp\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right)\right) \qquad (2.6.3)$$

selanjutnya, fungsi densitas (*probability density function*) dari distribusi Gompertz sebagai berikut :

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \exp\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right)\left(-exp\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{B}{\ln c}(\ln c\, .\, c^x)\right)\left(-exp\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right)\right)$$

$$f(x) = (Bc^x)\left(exp\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right)\right) \qquad (2.6.4)$$

Selain itu, dapat ditentukan fungsi peluang ${}_tp_x$ sebagai berikut

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(x)\, dx\right)$$

$$= \exp(-\int_x^{x+t} Bc^x dx)$$

$$= \exp(-B.\frac{1}{ln\ c}.c^{x})\Big|_{x}^{x+t}$$

$$= \exp(-\frac{B}{\ln c}(c^{x+t}-c^{x}))$$

$$_{t}p_{x} = \exp\left(-\frac{Bc^{x}}{\ln c}(c^{t}-1)\right) \tag{2.6.5}$$

2.6.1. Hukum Mortalita Gompertz

Benjamin Gompertz (1825), menjalani penelitian seraya menghitung nilai anuitas hidup, menyadari bahwa jika nilai percepatan mortalita bernilai konstan, maka tanpa memperhatikan usia nilai anuitas hidup akan sama walaupun pada usia 20 atau pada usia 65. Namun, pada kenyataannya tidak ada kasus seperti itu. Harga anuitas akan jauh lebih mahal untuk seseorang yang berusia 65 daripada seseorang yang berusia 20. Gompertz (1825) menduga kematian mungkin terjadi karena dua penyebab umum; satu, peluang tanpa kecenderungan sebelumnya untuk meninggal atau rusak; penyebab yang lain, yaitu memburuknya kondisi/keadaan, atau peningkatan ketidakmampuan untuk menahan kerusakan (Kunimura, 1997).

Di dalam penelitian Bejamin Gompertz (1825) mengenai daya tahan kekuatan pria dalam kerentanan kematiannya, Gompertz menyatakan kebalikan/perlawanan dari kerentanan pria untuk kematiannya dengan $\frac{1}{\mu_x}$. Lalu, Gompertz mengasumsikannya dalam persamaan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h$$

dengan h adalah konstanta proporsionalitas.

Dalam hal ini berarti kekuatan untuk menghindarkan dari kematian (Escaping Power from Death) bertolak secara proporsional dari kekuatan itu sendiri (Futami, 1993). Dengan mengintegralkan persamaan tersebut, maka

$$\frac{1}{\mu_x} = -hx$$

dapat diperoleh bentuk

$$\log\ (\frac{1}{\mu_x}) = -hx - \log B$$

dimana $-\log B$ adalah konstanta. Kemudian,

$$\frac{1}{\mu_x} = e^{-hx}.e^{-\log B}$$

$$\mu_x = e^{hx}.B$$

dengan $e^h = c$ sehingga

$$\mu_x = Bc^x$$

Dimana $B > 0$, $c > 1$, $x \geq 0$ (Jordan, 1991).

Dimana dapat didefinisikan, parameter B dikaitkan dengan peluang atau kemungkinan, dan parameter c adalah peningkatan ketidakmampuan menahan kerusakan. Dari uraian tersebut, dapat dilihat bahwa distribusi Gompertz memiliki ciri khas yaitu memiliki pola tingkat kegagalan (*failure rate*) yang meningkat. Jika c =1, tingkat kematian akan menjadi konstan, dan untuk c < 0 maka distribusi Gompertz akan memiliki pola laju tingkat kematian yang menurun. Hal ini sesuai dengan filosofinya yang menyatakan bahwa seiring berjalannya waktu, maka tingkat ketidakampuan menahan kerusakan akan meningkat. Sama halnya, dengan memberikan B dengan nilai yang positif akan menjamin bahwa pada setiap waktunya, pasti akan terdapat kemungkinan/peluang kematian yang positif (Kunimura, 1997).

2.7. Distribusi Makeham

Distribusi Makeham memberikan aproksimasi yang lebih baik untuk suatu distribusi data mortalita. Distribusi Makeham merupakan suatu fungsi perluasan dari distribusi Gompertz. Perbedaan antara keduanya, yaitu fungsi distribusi Makeham menggunakan parameter tambahan dari fungsi distribusi Gompertz. Berikut adalah percepatan mortalita distribusi Makeham

$$\mu_x = A + Bc^x \tag{2.7.1}$$

Dengan $B > 0, A \geq -B, c > 1, x \geq 0$

Maka, fungsi fungsi survival model hukum mortalita Makeham adalah :

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp\left(-\int_0^x \mu(x)\,dx\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^x A + Bc^x\,dx\right) \\ &= \exp\left(-Ax - B\left(\frac{1}{\ln c}\;c^x\right)\right)\Big|_0^x \\ &= \exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right) \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Dari fungsi survivalnya, dapat ditentukan fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*) dari distribusi Makeham yaitu :

$$F(x) = 1 - s(x) = \left(1 - \exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right) \tag{2.7.3}$$

dari (2.7.3), dapat ditentukan fungsi densitas (*probability density function*) dari distribusi makeham sebagai berikut :

$$f(x) = F'^{(x)} = \frac{d}{dx}\left(1 - \exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\left(-ex\,p\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \left(-A - \frac{B}{\ln c}(\ln c\,.\,c^x)\right)\left(-ex\,p\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}\,(c^x - 1)\right)\right)$$

$$f(x) \;= (A + Bc^x)\left(ex\,p\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}\,(c^x - 1)\right)\right) \qquad (2.7.4)$$

fungsi peluang ${}_tp_x$ dari hukum mortalita Makeham sebagai berikut :

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(x)\,dx\right)$$

$$= \exp(-\int_x^{x+t} A + Bc^x dx)$$

$$= \exp(-Ax - B.\frac{1}{ln\,c}.c^x)\Big|_{x}^{x+t}$$

$$= \exp(-At - \frac{B}{\ln c}(c^{x+t} - c^x))$$

$${}_tp_x = \exp\left(-At - \frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \qquad (2.7.5)$$

2.7.1. Hukum Mortalita Makeham

Hukum mortalita Makeham merupakan modifikasi dari hukum mortalita Gompertz. Dalam pernyataan sebelumnya mengenai penyebab umum terjadinya kematian, Gompertz hanya menggunakan penyebab kedua dalam menentukan hukum mortalitanya. Hal tersebut membuat Makeham (1860) menggabungkan dua penyebab tersebut. Dengan pengaruh dari penyebab pertama yaitu kesempatan akan menjadi tambahan konstanta pada percepatan mortalita Gompertz (Jordan, 1991).

$$\mu_x = A + Bc^x$$

Dengan $B > 0, A \geq -B, c > 1, x \geq 0$

Konstanta A dapat mewakili faktor terjadinya kecelakaan, dan Bc^x dapat mewakili faktor usia. Oleh karena itu, masing-masing hukum melibatkan sejumlah parameter yang tidak ditentukan, karenanya masing-masing dapat berupa bilangan tak terbatas dari fungsi survival yang berbeda. Hukum mortalita ini hanya membentuk fungsi matematika yang diasumsikan dan tidak menghasilkan pengukuran numerik mortalitas sampai terpilihnya nilai yang sesuai untuk parameter tersebut. Hal ini akan ditemukan bahwa nilai dari masing-masing parameter terletak didalam kisaran batas tertentu ketika fungsi survivalnya mengikuti pola mortalitas pada umumnya. Misalnya untuk hukum mortalita Makeham, kisaran batas parameternya berada di

$$0.001 < A < 0.003$$

$$10^{-6} < B < 10^{-3}$$

$$1.08 < c < 1.12$$

(Jordan, 1991).

Pada kasus tertentu, jika nilai A = 0 pada hukum mortalita Makeham, maka dapat menjadi hukum mortalita Gompertz. Dan jika nilai $c = 1$ pada hukum mortalita Gompertz dan Makeham, maka dapat menghasilkan distribusi eksponensial (laju tingkat kematian konstan).

2.8. Metode Kuadrat Terkecil Nonlinear

Hukum mortalita merupakan bentuk pendekatan terhadap percepatan mortalita dari suatu tabel mortalita. Dalam menentukan nilai premi yang didekati berdasarkan hukum mortalita Gompertz dan Makeham, terdapat modifikasi perhitungan pada percepatan mortalita *force of mortality* $\mu(x+t)$ yang melibatkan sejumlah parameter-parameter tertentu. Terdapat beberapa cara dalam menentukan nilai parameter pada hukum mortalita, yakni dengan metode kuadrat terkecil, metode maximum likelihood estimation, trial dan error, dsb. Pada penelitian ini, akan digunakan metode kuadrat terkecil non linear (*nonlinear least squares)* . Pengestimasian nilai parameter dilakukan dengan menggunakan bantuan perangkat lunak software R.

Model nonlinear merupakan bentuk hubungan antara peubah respon dengan peubah penjelas yang tidak linear dalam parameter. Secara umum model nonlinear ditulis sebagai berikut :

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (2.8.1)$$

dengan

y_i = peubah respon ke-i

$f(x_i)$ = fungsi nonlinear

x_i = peubah penjelas respon ke-i

ε_i = galat ke-i

Misalkan model nonlinear yang dipostulat dengan bentuk :

$$Y = f\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) + \varepsilon \qquad (2.8.2)$$

Misalkan $X = \left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$ dan $\theta = \left(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p\right)$

maka persamaan (2.6.2) dapat diringkas menjadi :

$$Y = f(X, \theta) + \varepsilon \tag{2.8.3}$$

maka jumlah kuadrat galat untuk model nonlinear di atas didefinisikan sebagai berikut :

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - f(X, \theta))^2 \tag{2.8.4}$$

Nilai dugaan kuadrat terkecil bagi θ akan dilambangkan dengan $\hat{\theta}$. Nilai dugaan ini adalah nilai θ yang meminimumkan nilai S. Untuk mendapatkan nilai dugaan kuadrat terkecil $\hat{\theta}$ yaitu dengan mendiferensialkan persamaan (2.6.3) terhadap θ kemudian disamadengankan nol (Mustari, 2013).

Diketahui dari (2.6.1) persamaan nonlinear percepatan mortalita Gompertz adalah

$$\mu_{xt} = Bc^{(x+t)}$$

Misalkan $\mu_{xt} = Y$ dan t = 1, maka kumlah kuadrat galat untuk persamaan nonlinear percepatan mortalita Gompertz yaitu

$$S = \sum_{i=0}^{109} (Y_i - B_1 {c_1}^{(x_i+1)})^2$$

dengan

Y_i = peubah respon yang menyatakan percepatan mortalita tabel Amerika pada tahun ke-i

B_1 = parameter 1 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Gompertz

c_1 = parameter 2 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Gompertz

x_i = usia (tahun) ke-i

ε_i = galat ke-i

Maka berlaku:

$$\frac{dS}{dB_1} = 0 \qquad dan \qquad \frac{dS}{dc_1} = 0$$

Selanjutnya, diketahui fungsi nonlinear percepatan mortalita Makeham (2.7.1) yaitu:

$$\mu_{xt} = A + Bc^{(x+t)}$$

Misalkan $\mu_{xt} = Y$ dan $t = 1$ maka kumlah kuadrat galat untuk persamaan nonlinear percepatan mortalita Makeham yaitu

$$S = \sum_{i=1}^{109} (Y_i - A_2 - B_2 {c_2}^{(x_i+1)})^2$$

dengan

Y_i = peubah respon yang menyatakan percepatan mortalita tabel Amerika pada tahun ke-i

A_2 = parameter 1 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Makeham

B_2 = parameter 2 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Makeham

c_2 = parameter 3 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Makeham

x_i = usia (tahun) ke-i

ε_i = galat ke-i

maka berlaku

$$\frac{dS}{dA_2} = 0 \quad , \quad \frac{dS}{dB_2} = 0 \qquad dan \qquad \frac{dS}{dc_2} = 0$$

2.9. Bunga

Bunga adalah pembayaran yang dilakukan oleh si peminjam sebagai balas jasa atas pemakaian uang yang dipinjam itu. Sejumlah uang yang menghasilkan bunga itu disebut pokok. Tingkat bunga adalah hasil pembungaan dalam 1 tahun atas pokok sebesar 1. Tingkat bunga ini biasanya dinyatakan dalam bentuk persentasi (Bumiputera,1971)

2.9.1. Bunga Sederhana

Besarnya pendapatan bunga tergantung pada besar pokok, jangka waktu investasi, dan tingkat bunga. Cara perhitungan bunga yang hanya berdasarkan pada perbandingan pokok dan jangka investasinya dinamakan bunga sederhana atau bunga tunggal. Misal besar pokok P, tingkat bunga tunggal i, jangka investasi n tahun maka besarnya bunga adalah

$$I = Pni \qquad (2.9.1.1)$$

Setelah beberapa waktu kemudian total pokok berikut bunganya menjadi sebesar

$$S = P + I = P(1 + ni) \qquad (2.9.1.2)$$

2.9.2. Bunga Majemuk

Sedangkan yang dimaksud bunga majemuk adalah suatu perhitungan bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya adalah besar pokok sebelumnya ditambah dengan besar bunga yang diperoleh. Misal besar pokok P, tingkat bunga i, jangka investasi n tahun, maka total pokok beserta bunga adalah

$$S = P(1 + i)^n \qquad (2.9.2.1)$$

didalam bunga majemuk didefinisikan suatu fungsi v sebagai berikut

$$v = \frac{1}{1+i} \tag{2.9.2.2}$$

dengan v adalah nilai sekarang dari pembayaran sebesar 1 yang dilakukan 1 tahun kemudian. Karena itu, apabila pembayarannya dilakukan 1 tahun lebih cepat maka besarnya bunga yang hilang adalah $d = 1 - v$ yang disebut dengan tingkat diskonto.

2.9.3. Laju Tingkat Suku Bunga

Selain itu, terdapat tingkat suku bunga lainnya yaitu tingkat bunga nominal yaitu jika setahun terjadi pembayaran sebanyak k kali, dengan bunga tahunan sebesar i, maka satu tahun kemudian pokok beserta bunganya menjadi sebesar:

$$(1 + \frac{j}{k})^k$$

atau besarnya bunga setelah satu tahun kemudian yaitu:

$$i = (1 + \frac{j}{k})^k - 1$$

$k =$ jumlah konversi bunga dalam 1 tahun

$\frac{1}{k} =$ jangka waktu tiap konversi

$j =$ tingkat bunga nominal yang digunakan setiap $\frac{1}{k}$ tahun

$\frac{j}{k} =$ bunga nominal

Tingkat bunga nominal dinyatakan dalam simbol yaitu $i^{(k)}$ atau dapat dinyatakan dengan

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k \tag{2.9.3.1}$$

Dari pernyataan tersebut, maka

$$\log\ (1+i) = k\log\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)$$

$$\log\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right) = \frac{\log(1+i)}{k}$$

$$\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right) = \exp\left(\frac{\log\,(1+i)}{k}\right)$$

$$\frac{i^{(k)}}{k} = \exp\left(\frac{\log\,(1+i)}{k}\right) - 1$$

$$i^{(k)} = k\left\{\exp\left(\frac{\log\,(1+i)}{k}\right) - 1\right\}$$

$$= k\{\frac{1}{k}\log\ (1+i) + \frac{\{\log\ (1+i)\}^2}{2k^2} + \cdots\}$$

jika $k \to \infty$, didapatkan nilai δ dan dinyatakan dalam

$$\delta = \lim_{k\to\infty} i^{(k)} = \log\,(1+i) \qquad (2.9.3.2)$$

dengan δ disebut dengan percepatan tingkat suku bunga (*force of interest*). Dalam selang waktu Δt, bunga yang diperoleh adalah $\delta\Delta t$ dengan pokok sebesar 1 satuan. Besar pokok di awal tahun setiap Δt akan bertambah sebesar bunganya, pada akhir tahun besar tingkat bunga efektifnya adalah i. Dari $(2.9.3.2)$ dapat mempunyai hubungan seperti berikut:

$$e^{\delta} = 1 + i = \left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^k$$

$$v = e^{-\delta} \qquad (2.9.3.3)$$

(Futami, 1993).

2.10. Asuransi Jiwa

Bilamana seseorang ditanggung oleh perusahaan asuransi jiwa, ia dan perusahaan itu menyetujui perjanjian tertulis yang disusun oleh perusahaan dan yang disahkan oleh instansi yang berwenang, perjanjian itu disebut polis. Polis itu mencakup pernyataan bahwa pemegang polis akan melakukan pembayaran-pembayaran tertentu yang disebut premi, dan perusahaan akan membayarkan sejumlah uang yang disebut uang pertanggungan, bila terjadi peristiwa-peristiwa tertentu. Orang yang akan menerima uang pertanggungan bila terjadi peristiwa kematian disebut ahliwaris atau yang ditunjuk (Bumiputera, 1912).

2.10.1. Asuransi yang Dibayarkan Pada Saat Kematian (Kontinu)

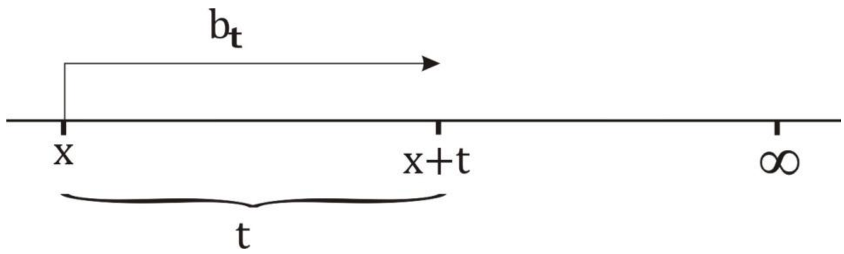
Pada Asuransi dengan perhitungan kontinu, pembayaran benefit kepada ahli waris nasabah dilakukan sesaat setelah nasabah meninggal dunia. Jumlah dan waktu pembayaran benefit pada asuransi jiwa tergantung pada panjang interval dari dikeluarkannya polis sampai pihak tertanggung meninggal dunia. Berdasarkan uraian tersebut, asuransi jiwa terdiri dari fungsi benefit didefinisikan sebagai b_t, fungsi v_t yaitu nilai sekarang dari pembayaran b_t, dan t adalah panjang interval dari penandatanganan kontrak hingga waktu kematian. Waktu penerbitan polis sampai waktu kematian pihak penanggung adalah waktu sisa hidup dengan peubah acak $T = T(x)$, Maka definisi dari fungsi nilai sekarang Z_t adalah

$$Z_t = b_t v_t$$

dengan Z_t merupakan fungsi peubah acak nilai sekarang (*Actuarial present value)* dari klaim / pembayaran benefit pada saat polis asuransi diterbitkan (Bowers, dkk., 1997). Pada penelitian kali ini, jenis asuransi jiwa yang digunakan adalah asuransi jiwa berjangka n-tahun.

2.10.1.1. Asuransi Jiwa Berjangka n-tahun

Dalam asuransi jiwa berjangka n-tahun, uang pertanggungan akan dibayarkan bila tertanggung meninggal didalam jangka waktu tertentu yang telah disepakati pada saat penandatanganan polis. Jadi, misalkan usia pada saat penandatanganan kontrak adalah x, jika pihak tertanggung meninggal sebelum usia $x + t$ maka kepada pewarisnya akan dibayarkan benefit/santunan yang telah disepakati. Tetapi, bila dia hidup mencapai usia $x + t$ maka tidak akan ada pembayaran (Sembiring, 1986). Jika digambarkan dalam bentuk grafik sebagai berikut



Gambar 2.3. Pembayaran Benefit Asuransi Jiwa Berjangka

Jika benefit sebesar 1 satuan dibayarkan sesaat setelah meninggal, maka fungsi-fungsi yang digunakan untuk asuransi jiwa berjangka n-tahun adalah

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^t \quad t \geq 0$$

$$Z = \begin{cases} v^t & T \leq n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Sehingga, nilai premi tunggal (*Actuarial Present Value*) untuk asuransi jiwa berjangka n-tahun dengan benefit dibayarkan sesaat setelah kematian pihak tertanggung adalah

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \int_0^n v^t f(t)\,dt$$
$$= \int_0^n v^t\, {}_t p_x \mu(x+t)\,dt \qquad (2.10.1.1.1)$$

(Bowers dkk., 1997).

Jika dikaitkan dengan kedua hukum mortalita, maka *APV* nya dapat dinyatakan sebagai berikut:

a. *Actuarial Present Value* asuransi jiwa berjangka n-tahun berdasarkan hukum mortalita Gompertz

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}.\mathrm{e}^{\left(-\frac{Bc^x}{\ln c}\left(c^t-1\right)\right)}.\left(\mathrm{Bc}^{\mathrm{x+t}}\right)dt \qquad (2.10.1.1.2)$$

b. *Actuarial Present Value* asuransi jiwa berjangka n-tahun berdasarkan hukum mortalita Makeham

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}.\mathrm{e}^{\left(-At-\frac{Bc^x}{\ln c}\left(c^t-1\right)\right)}.\left(\mathrm{A}+\mathrm{Bc}^{\mathrm{x+t}}\right)dt \qquad (2.10.1.1.3)$$

2.10.2. Asuransi yang Dibayarkan Pada Akhir Tahun setelah Kematian (Diskret)

Pada kenyataannya, banyak kasus dimana benefit dibayarkan sesaat setelah kematian, dengan menggunakan waktu sisa hidup yang dilambangkan dengan *T*. Pada kasus asuransi kebanyakan, informasi terbaik tersedia pada distribusi peluang dari *T* dalam bentuk tabel mortalita diskret. Dimana waktu sisa hidupnya dinyatakan oleh peubah acak *K*, atau yang biasa disebut dengan *curtate-future-lifetime*.

Dengan fungsi benefit yang dilambangkan dengan b_{k+1} dan fungsi diskon v_{k+1}, nilai sekarang yang dilambangkan dengan z_{k+1} adalah

$$z_{k+1} = b_{k+1} \,.\, v_{k+1}$$

Dimana peubah acak dari nilai sekarang z_{k+1} dilambangkan dengan Z.

2.10.2.1. Asuransi Jiwa Berjangka n-tahun

Untuk asuransi berjangka *n*-tahun dimana benefit nya dibayarkan pada akhir tahun setelah kematian mempunyai fungsi

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1 & k = 0,1,\dots,n-1 \\ 0 & selainnya \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}$$

$$Z = \begin{cases} v^{k+1} & K = 0,1,\dots,n-1 \\ 0 & selainnya \end{cases}$$

Nilai sekarang (*Actuarial present value*) pada asuransi berjangka n-tahun yaitu

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} f(t)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_k p_x q_{x+k} \qquad (2.10.2.1.1)$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.11. Anuitas Hidup

2.11.1. Anuitas Hidup Kontinu

Anuitas hidup adalah serangkaian pembayaran (besarnya pembayaran berkala boleh berubah) yang dilakukan selama seseorang tertentu masih hidup (Sembiring, 1986). Anuitas hidup dengan pembayaran sebesar P_t satuan yang pembayarannya diakukan secara terus-menerus (kontinu) disebut dengan anuitas hidup kontinu. Dengan Y adalah peubah acak dari pembayaran anuitas hidup kontinu yang dilambangkan dengan $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ untuk setiap $T \geq 0$ dimana T menyatakan waktu sisa hidup (x).

$$Y = \int_0^T v^t \,. P_t dt$$

Dengan P_t sebesar 1 satuan, maka

$$Y = \int_0^T v^t \,. P_t dt = \int_0^T e^{-\delta t}\, dt = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$$

$$= \frac{1 - v^t}{\delta} = \bar{a}_{\overline{T|}} \qquad (2.11.1.1)$$

Actuarial Present Value dari anuitas kontinu yaitu

$$\bar{a}_x = E[Y] = E\left[\bar{a}_{\overline{T|}}\right] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T|}} \,. f(t) dt$$

$$= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T|}} \,.\ {}_tp_x\, \mu_x(t) dt \qquad (2.11.1.2)$$

Dengan menggunakan integral parsial,

$$u = \bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$$

$$du = \frac{\delta e^{-\delta t}}{\delta} dt = e^{-\delta t} dt = v^t dt$$

$$dv = \ {}_tp_x\, \mu_x(t)dt = e^{-\mu_x(t).t}.\, \mu_x(t)\ dt$$

$$v = \int e^{-\mu_x(t).t}.\, \mu_x(t)\ dt = -\frac{1}{\mu_x(t)} e^{-\mu_x(t).t}.\, \mu_x(t)$$

$$= -e^{-\mu_x(t).t}$$

$$= -\ {}_tp_x$$

Maka,

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T|}}\, .\ {}_tp_x\, \mu_x(t)dt$$

$$= (\bar{a}_{\overline{T|}}).(-\ {}_tp_x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-\ {}_tp_x).\, v^t dt$$

Anuitas hidup kontinu dapat dinyatakan

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty (\ {}_tp_x).\, v^t dt \qquad (2.11.1.3)$$

Pada penelitian ini, akan digunakan nilai tunai anuitas hidup berjangka yaitu

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n (\ {}_tp_x).\, v^t dt \qquad (2.11.1.4)$$

dimana $\bar{a}_{x:\bar{n}|}$ merupakan *Actuarial Present Value* dari anuitas berjangka n-tahun.

Maka, anuitas berjangka untuk hukum mortalita Gompertz adalah

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\, .\, e^{\left(-\frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right)} dt \qquad (2.11.1.5)$$

dan anuitas berjangka untuk hukum mortalita Makeham adalah

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\, .\, e^{\left(-At - \frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right)} dt \qquad (2.11.1.6)$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.11.2. Anuitas Hidup Diskret

Anuitas hidup diskret menggunakan anuitas awal (*due annuity*) yang pembayarannya dilakukan setiap awal tahun. Nilai sekarang dari pembayaran anuitas tersebut yang merupakan peubah acak dari Y adalah :

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1 - v^{k+1}}{\delta} \quad , \qquad K \geq 0 \tag{2.11.2.1}$$

Dapat diperoleh nilai sekarang (*Actuarial Present Value)* untuk anuitas seumur hidup sebagai berikut

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E[Y] = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}\ P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1|}} \cdot\ {}_kp_x \cdot q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot\ {}_kp_x \end{aligned} \tag{2.11.2.2}$$

Pada penelitian ini, akan digunakan nilai tunai anuitas hidup berjangka diskret yaitu

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot\ {}_kp_x \tag{2.11.2.3}$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.12. Premi Asuransi Jiwa

Premi adalah besarnya pembayaran tertentu yang dilakukan oleh pihak tertanggung kepada perusahaan asuransi yang disetujui dalam suatu perjanjian dalam kontrak tertulis yang disebut dengan polis asuransi. Besarnya premi tergantung atas tiga hal, yaitu peluang meninggal, tingkat bunga, dan biaya.

Peluang meninggal tergantung atas umur, jenis kelamin, pekerjaan, kebiasaan seseorang, dan berbagai hal lain. Dana yang terkumpul pada perusahaan asuransi akan diinvestasikan dengan tingkat bunga tertentu, dan sebagian dari bunga tersebut seharusnyalah menjadi milik pemegang polis. Perusahaan asuransi tidak dapat bekerja tanpa biaya, biaya pegawainya untuk mengeluarkan polis, mengadministrasikan polis dan membayarkan santunan, pajak, komisi, dan sebagainya. Premi yang dihitung tanpa memperhatikan faktor biaya disebut premi bersih. Premi dapat dibayarkan sekaligus, disebut premi tunggal. atau dalam jangka waktu tertentu misalnya per tahun, per bulan, per minggu, dsb. (Sembiring, 1986).

Namun, pada kali ini akan dibahas mengenai premi yang dibayarkan pada setiap tahunnya atau dapat disebut dengan premi tahunan. Premi tahunan kontinu dilambangkan dengan $P(\bar{A}_x)$. Dengan menggunakan *loss function,* maka

$$0 = E[L] = E\left[1.v^T - P(\bar{A}_x).\bar{a}_{\overline{T|}}\right]$$

$$= E[v^T] - P(\bar{A}_x).E[\bar{a}_{\overline{T|}}]$$

$$= \bar{A}_x - P(\bar{A}_x)\bar{a}_x$$

$$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{2.12.1}$$

Persamaan tersebut merupakan premi tahunan dengan asuransi seumur hidup.

Premi tahunan untuk asuransi jiwa berjangka yaitu

$$P\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right) = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{2.12.2}$$

Hubungan antara nilai premi tunggal asuransi berjangga *n*-tahun diskrit dan kontinu adalah

$$P(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta} P^{1}_{x:\overline{n}|} \tag{2.12.3}$$

(Gauger,1997).

Berdasarkan persamaan (2.12.3), maka premi tahunan berdasarkan tabel mortalita Amerika adalah

$$P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{i\left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k}p_x q_{x+k}\right)}{\delta\left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k}\ {}_{k}p_x\right)}$$

Premi tahunan berdasarkan hukum mortalita Gompertz adalah

$$P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\left(\int_0^n e^{-\delta t}.\mathrm{e}^{\left(-\frac{Bc^x}{\ln c}\left(c^t-1\right)\right)}.\left(\mathrm{Bc}^{\mathrm{x+t}}\right)dt\right)}{\left(\int_0^n e^{-\delta t}.\mathrm{e}^{\left(-\frac{Bc^x}{\ln c}\left(c^t-1\right)\right)}dt\right)}$$

dan premi tahunan berdasarkan hukum mortalita Makeham adalah

$$P\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{\left(\int_0^n e^{-\delta t}.\mathrm{e}^{\left(-At-\frac{Bc^x}{\ln c}\left(c^t-1\right)\right)}.\left(\mathrm{A}+\mathrm{Bc}^{\mathrm{x+t}}\right)dt\right)}{\left(\int_0^n e^{-\delta t}.\mathrm{e}^{\left(-At-\frac{Bc^x}{\ln c}\left(c^t-1\right)\right)}dt\right)}$$