II. LANDASAN TEORI

2.1 Peubah Acak

Suatu percobaan yang dapat diulang pada kondisi yang sama dan hasil dari percobaan tersebut tidak diketahui secara pasti sebelum percobaan itu dilakukan disebut sebagai Percobaan Acak. Dalam percobaan acak akan menghasilkan suatu peubah acak yang dapat disajikan dalam ruang sampel. Ada dua macam peubah, yaitu kuantitatif dan kualitatif. Pengamatan yang berasal dari peubah kuantitatif dapat diklasifikasikan atas kontinu dan diskrit.

Definisi 2.1 Peubah Acak dan Ruang Sampel

Peubah acak adalah suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan nyata yang ditentukan oleh setiap unsur dalam ruang sampel yang memetakkan setiap elemen $c \in C$ dengan satu dan hanya satu bilangan real $X(c) = x$ (Hogg & Craigg, 1986).

Ruang sampel didefinisikan sebagai himpunan dari semua gugusyang unsur-unsurnya terdiri atas semua kemungkinan hasil percobaan, dan dilambangkan dengan huruf C (Walpole, 1995).

Definisi 2.2 Peubah Kuantitatif dan Peubah Kualitatif

Peubah kuantitatif adalah peubah yang pengamatannya dapat diukur, sebab mempunyai sifat urutan atau rangking alami. Peubah kualitatif adalah peubah yang tidak memungkinkan dilakukannya pengukuran numerik. Pada peubah kualitatif pengamatannya berupa memasukkan suatu individu ke dalam satu dari beberapa kategori yang saling terpisah. Pengamatan-pengamatan tersebut tidak dapat diurutkan secara berarti ataupun diukur, hanya diklasifikasikan dan kemudian dicacah (Steel & Torrie, 1995).

Definisi 2.3 Ruang Sampel Diskrit dan Peubah Acak Diskrit

Bila suatu ruang sampel mengandung jumlah titik sampel yang terhingga atau suatu barisan unsur yang tidak pernah berakhir tetapi yang sama banyaknya dengan bilangan cacah, maka disebut Ruang Sampel Diskrit (Walpole, 1995). Pandang peubah acak X, dengan ruang sampel berdimensi satu C, C merupakan himpunan titik-titik, sehingga setiap selang hingga mengandung berhingga banyaknya titik C.

Misalkan ada fungsi $f(x)$ yang memenuhi :

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in C$
2. $\sum f(x) = 1$
3. Untuk $A \subset C,$ berlaku $P(A) = \Pr(X \epsilon A) = \sum f(x)$

maka X disebut Peubah Acak diskrit dan $f(x)$ disebut fungsi peluang dari X (Hoog & Craigg, 1986).

Definisi 2.3 Ruang Sampel Kontinu dan Peubah Acak Kontinu

Bila suatu ruang sampel mengandung tak hingga banyaknya titik sampel yang sama dengan banyaknya titik pada suatu ruas garis, maka ruang itu disebut Ruang

Sampel Kontinu (Walpole, 1995). Pandang peubah acak X, dengan sampel berdimensi satu C yang kontinu, misalkan ada fungsi $f(x)$ yang memenuhi :

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in C$
2. $\int f(x) = 1$
3. Untuk $A \subset C,$ berlaku $P(A) = \Pr(X \epsilon A) = \int f(x)$

maka X disebut Peubah Acak Kontinu dan $f(x)$ disebut fungsi peluang dari X (Hoog & Craigg, 1986).

2.2 Analisis Survival

Analisis survival adalah analisis mengenai data yang diperoleh dari catatan waktu yang dicapai suatu objek sampai terjadinya peristiwa gagal (*failure event*). Dalam menentukan waktu survival, T, terdapat tiga elemen yang harus diperhatikan yaitu waktu awal (*time origin*), definisi *failure time* yang harus jelas, dan skala waktu sebagai satuan pengukuran.

2.3 Fungsi Kepekatan Peluang

Menurut Elisa T Lee (1920), seperti beberapa peubah acak kontinu lainnya, waktu kelangsungan hidup T mempunyai fungsi kepekatan peluang (f.k.p) didefinisikan sebagai limit dari peluang suatu individu yang gagal dalam interval pendek t ke $t + \Delta t$ per satuan lebar Δt, atau peluang kegagalan dalam interval kecil per satuan waktu. Itu dapat dijelaskan sebagai:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \qquad (2.1)$$

$f(t)$ adalah fungsi non negatif , yaitu

$f(t) \geq 0$ untuk semua $t \geq 0$

$= 0$ untuk $t < 0$

2.4 Fungsi Distribusi Waktu Kegagalan

Misalkan T adalah peubah acak kontinu yang menyatakan waktu kegagalan dimana T diasumsikan saling bebas yang didefinisikan pada interval waktu $(0, \infty)$

Fungsi distribusi waktu kegagalan didefinisikan sebagai :

$$F_T(t) = \Pr(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx \quad (2.2)$$

Fungsi distribusi kumulatif ini menyatakan peluang suatu sistem yang mengalami kegagalan hingga batas waktu t. Sifat-sifat dari fungsi distribusi :

a) $0 \leq F_T(t) \leq 1$ karena $0 \leq \Pr\{T \leq t\} \leq 1$

Bukti : Misalkan $T \in \Sigma$ dengan Σ adalah ruang kejadian (*event space*) dari himpunan semua kejadian (*outcomes*) yang mungkin terjadi (ε), maka:

$\rightarrow \emptyset \leq T \leq \Omega$, dengan Ω adalah ruang sampel dari ε

$\rightarrow 0 \leq \Pr(T) \leq 1$ ■

b) $F_T(t)$ fungsi tidak turun (*non decreasing*)

Bukti : Misalkan F adalah suatu fungsi yang bernilai real pada interval $[0, \infty)$. Fungsi F disebut fungsi *non decreasing* pada interval $[0, \infty)$, jika untuk sebarang titik t_1 dan t_2 pada interval $[0, \infty)$, dimana $t_1 < t_2$ maka $F_T(t_1) \leq F_T(t_2)$ ■

c) $F_t(\infty) = \lim_{\Delta t \to 0} F_T(t) = 1$ dan $F_t(-\infty) = \lim_{\Delta t \to 0} F_T(t) = 0$

Bukti : $F_t(\infty) = 1$ dan $F_t(-\infty) = 0$ karena $\{t : t \leq \infty\}$ adalah seluruh ruang berdimensi satu dan $\{t : t \leq -\infty\}$ adalah himpunan kosong ■

2.5 Fungsi Kelangsungan Hidup (Fungsi Survival)

Menurut Elisa T. Lee (1920), fungsi kelangsungan hidup (fungsi *survival*) dinotasikan dengan $S(t)$ didefinisikan sebagai peluang suatu individu yang bertahan lebih dari t:

$S(t) = P$ (suatu individu bertahan lebih dari t)

$$= P(T > t) = \int_t^\infty f(x)dx \qquad (2.3)$$

Dari definisi fungsi distribusi kumulatif $F_T(t)$, maka

$S(t) = 1 - P\ (T > t)$

$$= 1 - F(t) \qquad (2.4)$$

Dengan $S(t)$ adalah fungsi tidak naik (*non increasing*) yaitu suatu fungsi yang bernilai real, jika untuk sebarang titik t_1 dan t_2 pada interval $[0, \infty)$ dengan $t_1 \geq t_2$ maka $S(t_1) \leq S(t_2)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa

$F(0) = 0$ dan $F(\infty) = 1$

Akan ekuivalen terhadap

$S(\infty) = 0$ dan $S(0) = 1$

2.6 Fungsi Hazard

Menurut Elisa T Lee (1920), fungsi hazard $h(t)$ dari waktu kelangsungan hidup T tergantung pada *failure rate*. Ini didefinisikan sebagai peluang gagal selama interval waktu yang sangat kecil, diasumsikan bahwa individu memiliki hidup yang lebih lama untuk awal dari interval, atau sebagai limit dari peluang individu gagal dalam interval yang sangat kecil, t ke $t + \Delta t$ per satuan waktu.

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t<T<t+\Delta t\ |T\geq t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\big((t<T<t+\Delta t)\cap(T\geq t)\big)/P(T\geq t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P((t<T<t+\Delta t)\cap(T\geq t)}{\Delta t\ P(T\geq t)}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t<T<t+\Delta t)}{\Delta t\ (1-F(t))}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t\ (1-F(t))}$$

$$= \frac{1}{(1-F(t))} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{2.5}$$

fungsi hazard kumulatif didefinisikan sebagai :

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx \tag{2.6}$$

Dari persamaan (2.4) dan (2.5), maka diperoleh

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{2.7}$$

$f(t)$ adalah turunan dari fungsi kumulatif distribusi, maka:

$$f(t) = \frac{d}{dt}\ F(t) = \frac{d}{dt}[1-S(t)] = -\frac{d}{dt}S(t) \tag{2.8}$$

Maka dari persamaan (2.8) dapat diperoleh :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{-\left[\frac{d}{dt}s(t)\right]}{S(t)} = -\frac{d}{dt}[\ln S(t)] \tag{2.9}$$

selanjutnya dengan mengintegralkan persamaan (2.9) dari 0 sampai t dan menggunakan $S(0) = 1$, maka:

$$H(t) = -\int_0^t h(x)dx = \ln S(t)$$

$$H(t) = -\ln S(t) \tag{2.10}$$

Dan diperoleh persamaan untuk fungsi kelangsungan hidup, yaitu:

$$S(t) = exp[-H(t)] = exp\left[-\int_0^t h(x)dx\right] \tag{2.11}$$

dari persamaan (2.6) dan persamaan (2.10) maka diperoleh :

$$f(t) = h(t)exp\left[-\int_0^t h(x)dx\right] \qquad ; t \geq 0 \tag{2.12}$$

(Elisa T. Lee, 1992).

Dari persamaan (2.5) telah kita ketahui bahwa $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$, kemudian untuk mengetahui karakteristik fungsi hazardnya h(t) diturunkan terhadap t sehingga:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{f^{'}(t)S(t) - f(t)S^{'}(t)}{S(t) \cdot S(t)}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{f^{'}(t)S(t) - f(t)(-f(t))}{S^2(t)}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{f^{'}(t)S(t) + f^2(t)}{S^2(t)}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{f^{'}(t)}{S(t)} + \frac{f^2(t)}{S^2(t)}$$

Setelah diperoleh turunan pertama dari h(t), untuk mengetahui kapan h(t) naik, turun atau konstan maka langkah selanjutnya adalah membuat $\frac{dh(t)}{dt} = 0$

$$\frac{dh(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{f^{'}(t)}{S(t)} + \frac{f^2(t)}{S^2(t)} = 0$$

$$\frac{f^2(t)}{S^2(t)} = -\frac{f^{'}(t)}{S(t)}$$

$$\frac{f^2(t)}{S(t)} = -f^{'}(t)$$

Dari persamaan di atas sekarang dapat diketahui bahwa sebuah distribusi akan

1. Memiliki laju *hazard* naik *(increasing)* jika $\frac{f^2(t)}{S(t)} > -f'(t)$,
2. Memiliki laju *hazard* turun *(decreasing)* jika $\frac{f^2(t)}{S(t)} < -f'(t)$ dan
3. Memiliki laju *hazard* konstan jika $\frac{f^2(t)}{S(t)} = -f'(t)$.

Syarat cukup sebuah fungsi kepekatan bukan merupakan suatu kondisi yang diperlukan untuk menentukan karakteristik laju *hazard*nya.

2.7 Aturan Glaser

Untuk melihat bagaimana laju hazard yang dipengaruhi oleh kombinasi dari nilai-nilai parameter maka Glaser (1980) membuat metode untuk menentukan bentuk laju hazard dengan satu turning point (titik belok). Dalam metodenya, Glaser menggunakan fungsi kepekatan peluang. Titik belok (turning point) dari suatu fungsi adalah suatu titik maksimum atau minimum dalam suatu fungsi atau kurva dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\eta(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (2.13)$$

Fungsi eta ini memiliki peranan penting dalam mengkaji fungsi dan bentuk laju hazard. Aturan Glaser (1980) sendiri adalah sebagai berikut :

1. Jika $\eta'(x) > 0$ untuk semua $x > 0$ maka Increasing (I)
2. Jika $\eta'(x) < 0$ untuk semua $x > 0$ maka Decreasing (D)
3. Misalkan terdapat $x_0 > 0$ sehingga $\eta'(x_0) < 0$ untuk semua $x \in (0, x_0)$, $\eta'(x_0) = 0$, $\eta'(x_0) > 0$ untuk semua $x > x_0$ dan

a. Jika $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, maka Increasing (I)

b. Jika $\lim_{x\to 0} f(x) \to \infty$, maka Bathtub (∪)

4. Misalkan terdapat $x_0 > 0$ sehingga $\eta'(x_0) > 0$ untuk semua $x \in (0, x_0)$, $\eta'(x_0) = 0$, $\eta'(x_0) < 0$ untuk semua $x > x_0$ dan

a. Jika $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, maka Upside-down Bathtub (∩)

b. Jika $\lim_{x\to 0} f(x) \to \infty$, maka Decreasing (D)

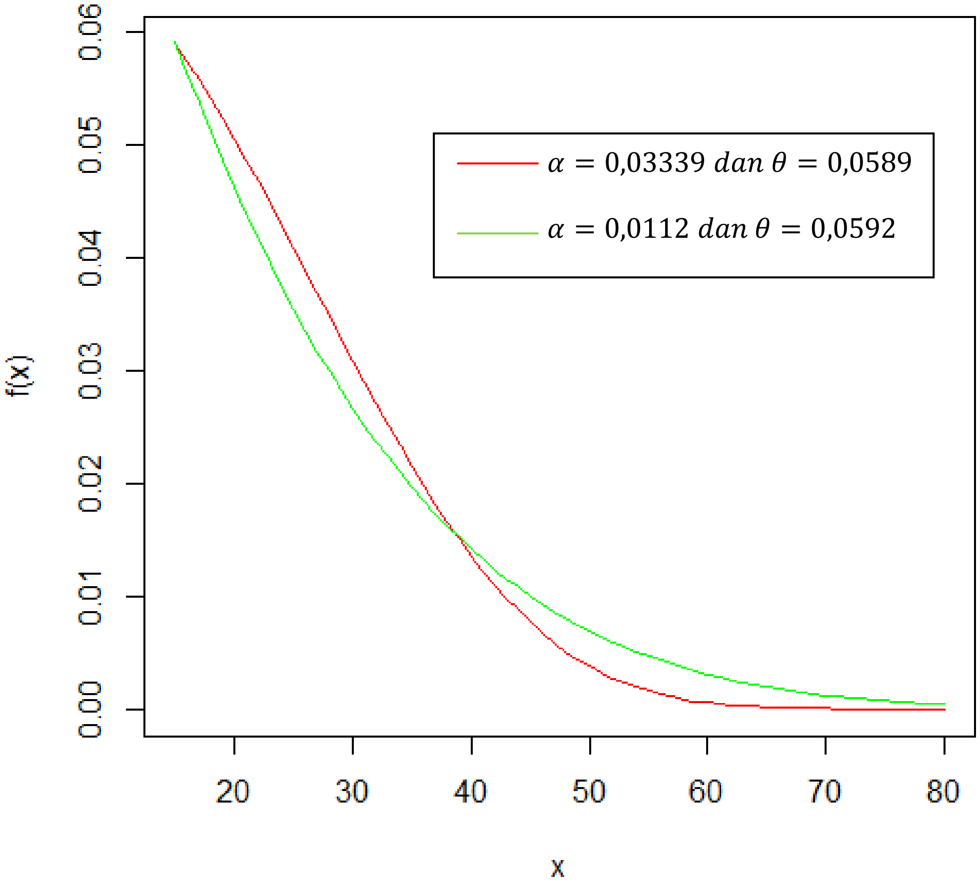
2.8 Distribusi *Gompertz*

Distribusi *Gompertz* secara luas dipakai untuk menggambarkan suatu pola kematian pada manusia. Distribusi *Gompertz* memiliki fungsi kepekatan peluang dengan parameter lokasi θ dan parameter bentuk α,

$$f(x) = \theta e^{\alpha x - \frac{\theta}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)} \; ; \; \theta, \alpha > 0 , x \geq 0 \qquad (2.14)$$

(Adam Lenart, 2011)

Berikut merupakan grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *Gompertz*

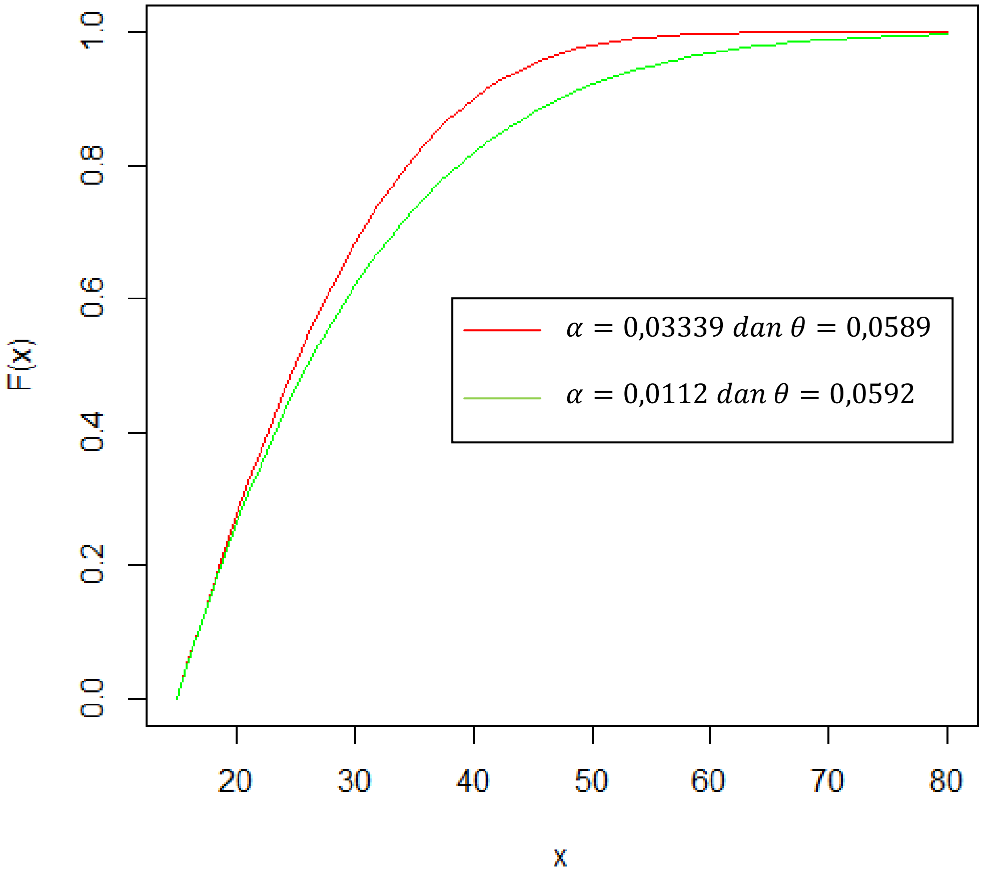


Gambar 2.1 Grafik Fungsi Kepekatan Peluang Distribusi *Gompertz*

Fungsi distributif kumulatif Gompertz didapatkan dari pengintegralan fungsi kepekatan peluang *Gompertz*, maka fungsi distributif kumulatif *Gompertz* adalah sebagai berikut

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{\theta}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)} \tag{2.15}$$

Dan berikut grafik fungsi distributif kumulatif *Gompertz*



Gambar 2. Grafik Fungsi Distribusi Kumulatif *Gompertz*

Dari fungsi distribusi kumulatif di atas maka didapatkan bentuk fungsi survival sebagai berikut

$$S(x) = 1 - F(x)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{\theta}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)}\right)$$

$$= e^{-\frac{\theta}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)} \qquad (2.16)$$

Setelah fungsi kelangsungan hidup distribusi *Gompertz* didapatkan, maka selanjutnya mencari fungsi *hazard* dari distribusi *Gompertz*.

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$$

$$= \frac{\theta e^{\alpha x - \frac{\theta}{\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right)}}{e^{-\frac{\theta}{\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right)}}$$

$$= \frac{\theta\ e^{\alpha x}\ e^{-\frac{\theta}{\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right)}}{e^{-\frac{\theta}{\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right)}} = \theta e^{\alpha x} \qquad (2.17)$$