I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan Diophantine merupakan suatu persamaan yang mempunyai solusi berupa bilangan-bilangan bulat. Persamaan Diophantine pertama kali dipelajari oleh matematikawan Yunani bernama Diophantus yang dikenal dengan julukan "bapak dari aljabar". Diophantus terkenal dengan karyanya yang berjudul *Arithmetica*. *Arithmetica* merupakan suatu pembahasan analitis teori bilangan yang berisi tentang pengembangan aljabar yang dilakukan dengan membuat persamaan dan persamaan-persamaan tersebut dikenal dengan sebutan Persamaan Diophantine (*Diophantine Equation*). Koefisien dari persamaan Diophantine hanya melibatkan bilangan bulat. Tidak ada bilangan pecahan di persamaan ini.

Pada tahun 1637, Pierre de Fermat seorang matematikawan Perancis menemukan persamaan Diophantine dengan bentuk umum $a^n + b^n = c^n$ dimana persamaan tersebut tidak memiliki solusi untuk $n > 2$, Persamaan ini juga dikenal dengan persamaan tripel Phytagoras.

Persamaan Diophantine tidak semuanya mempunyai solusi. Artinya, tidak semua persamaan seperti ini mempunyai penyelesaian pada himpunan bilangan bulat.

Contohnya $2x = 9$. Persamaan tersebut tidak mempunyai solusi pada himpunan bilangan bulat, namun akan mempunyai solusi pada himpunan bilangan real.

Persamaan Diophantine tidak harus linear, bisa saja kuadrat, kubik, atau lainnya. Contohnya $ax^2 + by^2 = c$. Persamaan Diophantine bisa memiliki banyak solusi yang beragam, mulai dari 0 sampai tak hingga. Bentuk umum persamaan Diophantine adalah $ax + by = c$ dengan a, b merupakan koefisien dan c merupakan konstanta bulat. Salah satu penyelesaian persamaan Diophantine adalah semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $ax + by = c$. Jika d adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b, maka agar persamaan $ax + by = c$ mempunyai solusi maka d harus dapat membagi c.

Pada mulanya persamaan Diophantine khususnya persamaan Diophantine linear menggunakan Algoritma Euclid untuk menyelesaikannya. Beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Diophantine bentuk linear antara lain: metode faktorisasi prima, dengan pertidaksamaan, metode parametrik, metode modulo, metode induksi, *Fermat's Method of Infinite Descent* (FMID).

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Ria Nuliantini (2014), Persamaan Diophantine dapat diselesaikan dengan metode ring $\mathbb{Z}[i]$ menggunakan sifat – sifat faktorisasi prima tunggal dalam ring yang ada dari sifat $\mathbb{Z}$. Dengan menjabarkan persamaan Diophantine menjadi perkalian elemen – elemen prima dalam ring $\mathbb{Z}[i]$, sehingga akan diperoleh solusi bilangan bulat yang memenuhi.

Berdasarkan dari latar belakang masalah yang telah diuraikan, maka penulis tertarik untuk meneliti tentang penyelesaian persamaan Diophantine yang lebih jauh lagi yaitu dengan relasi kongruensi modulo *m* menggunakan metode ring bilangan bulat Gaussian $\mathbb{Z}[i]$ dengan $\mathbb{Z}$ merupakan bilangan bulat, dan i adalah bilangan imajiner akar kuadrat dari -1, khususnya persamaan Diophantine non linear. Sehingga, penulis memilih judul " **Penyelesaian Persamaan Diophantine dengan relasi kongruensi modulo *m* pada ring** $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ ".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah " Bagaimana cara menyelesaikan persamaan Diophantine dengan relasi kongruensi modulo *m* pada ring $\mathbb{Z}[i]$? "

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang dilakukan dari penelitian ini, yaitu mengkaji penyelesaian persamaan Diophantine dengan relasi kongruensi modulo *m* pada ring $\mathbb{Z}[i]$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam pengetahuan ilmu matematika khususnya mengenai ring $\mathbb{Z}[i]$ dalam penyelesaian persamaan Diophantine dengan relasi kongruensi modulo *m*
2. Menambah pengetahuan tentang persamaan Diophantine.