III. FUNGSI-FUNGSI KHUSUS

Dalam penelitian ini, untuk menentukan momen, kumulan, dan fungsi karakteristik distribusi *G2R*, penulis menggunakan beberapa fungsi khusus yang berkaitan dengan hasil yang ingin dicapai dalam penelitian ini, yaitu:

3.1. Fungsi Beta

Nakhi (2001) menjelaskan tentang fungsi beta yang dinotasikan dengan $B(a,b)$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

dengan $B(a,b)$ konvergen untuk a, b > 0

Selain itu**,** Nakhi (2001) juga mengungkapkan bahwa sifat yang dimiliki fungsi beta adalah simetris, yaitu :

$$B(a,b) = B(b,a)$$

Bukti :

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

Dengan menggunakan transformasi x = 1 – y, maka diperoleh :

$$B(a,b) = \int_0^1 (1-y)^{a-1} y^{b-1}dy$$

$$B(a,b) = \int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1} dy$$

$$B(a,b) = B(b,a)$$

3.2. Fungsi Gamma

Abramowitz dan Stegun (1972) menjelaskan tentang fungsi gamma yang dinotasikan dengan $\Gamma(n)$ yang konvergen untuk n > 0 dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Rumus rekursi untuk fungsi gamma adalah sebagai berikut:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

Fungsi digamma merupakan hasil turunan pertama dari fungsi gamma yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\cdot\ (z) = \frac{d[\ln \Gamma(z)]}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

Selain fungsi digamma, ada juga fungsi polygamma yaitu fungsi yang diperoleh dari turunan ke-n fungsi gamma dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\cdot^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} \cdot\ (z) = \frac{d^{(n+1)}}{dz^{(n+1)}} \ln \Gamma(z)$$

n = 1, 2, 3, ...

3.3. Hubungan Distribusi Beta Dengan Distribusi Gamma

Pada penelitian ini, transformasi distribusi beta menjadi distribusi gamma digunakan untuk mentransformasi fungsi karakteristik distribusi *G2R* menjadi bentuk yang lebih sederhana. Mc Donald (1995) telah menjelaskan bahwa untuk menghitung nilai fungsi beta digunakan hasil dari fungsi gamma.

Dengan menggunakan koordinat polar, dilakukan perhitungan berikut :

Ambil : $x = \sin^2\theta$

$$dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

Batas-batas integral :

$$x = 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$x = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2(a-1)}(1-\sin^2\theta)^{b-1}\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-2}(\cos\theta)^{2(b-1)}\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-2}(\cos\theta)^{2b-2}\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}\, d\theta$$

Setelah perhitungan fungsi beta di atas, kemudian dilakukan perhitungan dengan menggunakan fungsi gamma, yaitu sebagai berikut.

Dengan mengambil definisi fungsi gamma, diperoleh

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

ambil $x = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$, maka memenuhi

$$= \int_0^\infty u^{2a-2} e^{-u^2} 2udu$$

$$= 2\int_0^\infty u^{2a-1} e^{-u^2} du$$

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{b-1} e^{-x} dx$$

ambil $x = v^2 \Rightarrow dx = 2vdv$, maka memenuhi

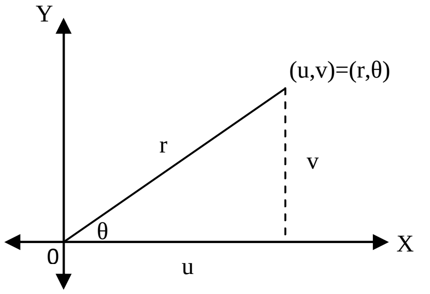
$$= \int_0^\infty v^{2n-2} e^{-v^2} 2vdv$$

$$= 2\int_0^\infty v^{2n-1} e^{-v^2} dv$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(2\int_0^\infty u^{2a-1} e^{-u^2} du\right)\left(2\int_0^\infty v^{2b-1} e^{-v^2} dv\right)$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty u^{2a-1} v^{2b-1} e^{-\left(u^2+v^2\right)} dudv$$

Dengan menggunakan transformasi koordinat kutub, yaitu sebagai berikut.



Sehingga diperoleh u = r cos θ dan v = r sin θ, maka dengan menggunakan transformasi parameter diperoleh persamaan berikut:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\left(r\cos\theta\right)^{2a-1}\left(r\sin\theta\right)^{2b-1}e^{-r^2}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{dr} & \frac{\partial v}{dr}\\ \frac{\partial u}{d\theta} & \frac{\partial v}{d\theta}\end{vmatrix}\,\mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\left(r\cos\theta\right)^{2a-1}\left(r\sin\theta\right)^{2b-1}e^{-r^2}\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r.\sin\theta & r.\cos\theta\end{vmatrix}\,\mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\left(r\cos\theta\right)^{2a-1}\left(r\sin\theta\right)^{2b-1}e^{-r^2}\ \mathrm{r}\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} r^{2(a+b)-1}e^{-r^2}\cos^{2a-1}\theta\,\sin^{2b-1}\theta\ \ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta$$

$$= \left(2\int_0^{0} r^{2(a+b)-1}e^{-r^2}\,dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2a-1}\theta\ Sin^{2b-1}\theta\ d\theta\right)$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

Jadi, diperoleh rumus umum untuk menghitung nilai fungsi beta menggunakan fungsi gamma, yaitu :

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

3.4. Rumus Euler

Rumus Euler adalah rumus matematika yang digunakan dalam analisis kompleks yang menunjukkan hubungan antara fungsi trigonometri dan fungsi eksponensial.

Kreyszig (1993) menuliskan bahwa rumus Euler untuk setiap bilangan riil x,

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

Dan fungsi sekawannya yaitu :

$$e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$$

dengan : e adalah basis logaritma natural

i adalah unit imajiner

diperoleh dari $\cos(-t) = \cos(t), \sin(-t) = -\sin(t)$.

Dengan mensubstitusikan nilai t = nx, maka diperoleh persamaan berikut.

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \qquad \text{.......} \qquad (1)$$

$$e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx) \qquad \text{.......} \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh rumus untuk menghitung nilai cos (nx) dan sin (nx) sebagai berikut.

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

dan

$$\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$