II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Keberlangsungan Hidup (*Survival Function*)

Misalkan x adalah usia seseorang saat menutup polis asuransi, sehingga X adalah peubah acak waktu meninggal.

Fungsi distribusi X dinyatakan dengan

$$F_x(x) = \Pr(X \leq x), x \geq 0 \tag{2.1}$$

Sehingga fungsi keberlangsungan hidup (*Survival Function*) dapat dinyatakan dengan :

$$s(x) = 1 - F_x(x) = \Pr(X > x), x \geq 0 \tag{2.2}$$

$s(x)$ adalah peluang orang yang berusia 0 tahun yang akan hidup mencapai usia x tahun. (*Bowers,1997*).

2.2 Peluang Waktu Sisa Hidup

x menyatakan seseorang masih hidup pada usia tertentu. Jika seseorang tersebut meninggal pada usia X dimana $(X > x)$ maka $T(x) = X - x$ menyatakan waktu sisa hidup dari x.

$T(x)$ menyatakan peubah acak waktu sisa hidup, dengan fungsi distribusinya didefinisikan sebagai berikut :

$$F(t) = \Pr(T(x) \leq t)$$

Sehingga dapat dicari :

$$
\begin{aligned}
F_{T(x)}(t) &= \Pr(\ T(x) \le t | X > x) \\
&= \Pr(\ X - x \le t | X > x) \\
&= \Pr(\ x < X \le x + t | X > x) \\
&= \frac{P(X \le x + t) - \ P(X \le x)}{P(X > x)} \\
&= \frac{F_x(x + t) - F_x(X)}{1 - F_x(X)} \\
&= \frac{\big(1 - s(x + t)\big) - (1 - s(x))}{\mathrm{s(x)}} \\
&= \frac{s(x) - s(x + t)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x)}{s(x)} - \frac{s(x + t)}{s(x)} \\
&= 1 - \frac{s(x + t)}{s(x)} \\
&= \ {}_t q_x
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Dalam ilmu aktuaria ${}_t q_x$ menyatakan peluang seseorang berusia x akan meninggal t tahun lagi atau akan meninggal sebelum usia $(x + t)$ tahun.

Sedangkan fungsi hidupnya:

$$
\begin{aligned}
\Pr(\ T(x) > t) &= 1 - \Pr(\ T(x) \le t) \\
&= 1 - \ {}_t q_x \\
&= 1 - \left[1 - \frac{s(x + t)}{s(x)}\right] \\
&= \frac{s(x + t)}{s(x)} \\
&= \ {}_t p_x
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Symbol ${}_tp_x$ menyatakan sebagai peluang seseorang yang berusia x akan hidup sampai dengan t tahun lagi atau akan hidup sampai usia $(x+t)$ tahun. Untuk seseorang yang baru lahir fungsi survivalnya dapat dinyatakan dengan ${}_tp_0$ dan dapat dituliskan:

$$ {}_tp_0 = s(x) \tag{2.5}$$

Peluang orang yang meninggal antara usia $x+t$ dan $x+t+u$ disebut peluang meninggal yang ditangguhkan, dimana x akan berlangsung hidup sampai t tahun dan meninggal dalam u tahun. Dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= P(t < T(x) \leq t+u) \\
&= P(T(x) \leq t+u) - P(T(x) < t) \\
&= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\
&= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)} \\
&= \left(\frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t)}{s(x+t)}\right) - \left(\frac{s(x+t)}{s(x+t)} \cdot \frac{s(x+t+u)}{s(x)}\right) \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left(1 - \frac{s(x+t+u)}{s(x+t)}\right) \\
&= {}_tp_x \,.\, (1 - {}_up_{x+t}) \\
&= {}_tp_x \,.\, {}_uq_{x+t}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Jika $u = 1$ maka peluang meninggal yang ditangguhkan dapat dinyatakan dengan ${}_{t|}q_x$, sehingga:

$$ {}_{t|}q_x = {}_tp_x \cdot q_{x+t} \tag{2.7}$$

Dalam kasus diskrit sering disebut dengan *Curtate-Future-Lifetime*, dengan symbol $K(x)$. $K(x)$ adalah bilangan integer terbesar dari $T(x)$. fungsi distribusinya adalah :

$$\begin{aligned} Pr[K(x) = k] = Pr[T(x) = k] \\ &= Pr[k < T(x) \leq k+1] \\ &= F(k+1) - F(k) \\ &= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x \\ &= (1 - {}_{k+1}p_x) - (1 - {}_kp_x) \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\ &= {}_kp_x \cdot q_{x+k} \\ &= {}_{k|}q_x \text{ , k = 1,2,3,………} \end{aligned} \tag{2.8}$$

(*Bowers,1997*).

2.3 Laju Tingkat Kematian (*Force Of Mortality*)

Laju tingkat kematian dari seseorang yang baru lahir akan meninggal antara usia x dan $x + \Delta x$ dengan syarat hidup pada usia x dapat dinyatakan dengan :

$$P(x < X < x + \Delta x | X > x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \tag{2.9}$$

Karena $F(x + \Delta x) - F(x)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi limit, maka :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} [F(x+\Delta x) - F(x)] \frac{\Delta x}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F(x)}$$

$$= \frac{\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}\right] . \Delta x}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F(x)}$$

$$= \frac{F'(x)\ \Delta x}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{f(x)\ \Delta x}{1 - F(x)}$$

$$\cong \frac{f(x)}{1-F(x)} \tag{2.10}$$

Untuk setiap usia x, laju tingkat kematian dari seseorang yang berusia x tahun dapat dinyatakan dengan :

$$\mu\ (x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x | X > x\ )}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{F'(x)\ \Delta x}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{F'(x)}{1 - F(x)}$$

$$\mu\ (x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} \tag{2.11}$$

Atau

$$\mu(x + t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x+t)} \tag{2.12}$$

Dengan $\mu(x + t)$ adalah probabilitas (*peluang*) waktu sisa hidup seseorang berusia x tahun antara t dan $t + \Delta t$ tahun dengan syarat ia masih hidup pada usia $x + t$ tahun.

Karena $s(x) = 1 - F(x)$ atau $F(x) = 1 - s(x)$, maka :

$$F'(x) = f(x) = -\,s'(x)$$

Sehingga diperoleh nilai laju kematian pada usia x adalah :

$$\mu\,(x) \quad = \frac{-s'(x)}{s(x)}$$

$$= \frac{-1}{s(x)} \cdot \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{d(s(x))} \cdot \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{d(x)}$$

$$\mu(x)\; dx = -d \ln s(x)$$

Dengan mengubah x menjadi y, maka diperoleh :

$$\mu(y)\; dy = -d \ln s(y)$$

Dan dengan menggunakan integral tertentu pada batas x sampai $x + t$ maka diperoleh :

$$\int_x^{x+t} \mu(y) dy = -\int_x^{x+t} d \ln s(y)$$

$$= -\ln s(y)|_x^{x+t}$$

$$= -\{\ln s\,(x+t) - \ln s(x)\}$$

$$= -ln\left(\frac{s\,(x+t)}{s\,(x)}\right)$$

$$= -\ln \quad {}_t p_x$$

$${}_t p_x \;=\; e^{-\int_x^{x+t} \mu\,(y)\,dy} \qquad (2.13)$$

Jika nilai laju tingkat kematian konstan ($\mu\ (x) = \ \mu$) untuk semua $x \geq 0$, artinya besarnya nilai dari laju tingkat kematian (*force of mortality*) adalah sama untuk semua usia nasabah yang hidup, maka diperoleh :

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \ {}_{x}p_0 \\
&= e^{-\int_0^x \mu\ (y)\ dy} \\
&= e^{-\mu x}
\end{aligned}
$$

Diketahui sebelumnya ${}_{t}q_x$ merupakan fungsi distribusi dari $T(x)$, sehingga fungsi densitas $T(x)$ adalah

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{d}{dt}\ {}_{t}q_x \\
&= \frac{d}{dt}\ (1 - \ {}_{t}p_x\ ) \\
&= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[- \frac{s(x+t)}{s(x)}\right] \\
&= \ - \frac{s'(x+t)}{s(x)} \\
&= \ - \frac{s'(x+t)}{s(x)}\ . \frac{s(x+t)}{s(x+t)} \\
&= \ \frac{s(x+t)}{s(x)} . - \frac{s'(x+t)}{s(x+t)}
\end{aligned}
$$

$$f(t) = \ {}_{t}p_x\ .\mu(x+t) \tag{2.14}$$

(*Bowers,1997*).

2.4 Bunga (*Interest*)

Bunga merupakan besarnya pembayaran yang dilakukan oleh pengguna modal kepada pemilik modal, biasanya sudah diberikan jaminan mengenai besarnya bunga yang ditambahkan. Besarnya pendapatan bunga tergantung pada besar pokok, jangka waktu investasi dan tingkat bunga. (*Futami, 1993*)

Secara umum perhitungan bunga di bagi menjadi dua, yaitu:

2.4.1 Bunga Sederhana (*Simple Interest*)

Bunga tunggal atau bunga sederhana adalah besarnya bunga dihitung dari nilai pokok awal dikalikan dengan tingkat bunga dan waktu . Besarnya bunga sederhana dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$I = P_0 \,.\, i.n \tag{2.15}$$

Sehingga setelah n tahun nilai total investasi menjadi :

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 + I \\ &= P_0 + P_0 \,.\, i.n \\ &= P_0\,(1 + i.n) \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.4.2. Bunga Majemuk (*Compound Interest*)

Bunga mejemuk adalah perhitungan bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya adalah besar pokok sebelumnya ditambah dengan besar bunga yang diperoleh. Besar pokok bunga majemuk dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$I = P_0 . i^n \tag{2.17}$$

Setelah n tahun nilai total investasinya menjadi

$$P_n = P_0\,(1 + i)^n \tag{2.18}$$

Dengan:

I : Interest value (nilai bunga)

P_0 : Pokok investasi

i : Rate of interest annually, tingkat suku bunga

n : Time, jangka waktu (lama) investasi (tahun)

Dalam bunga majemuk didefinisikan suatu fungsi v sebagai berikut:

$$v = \frac{1}{(1+i)} \tag{2.19}$$

Sehingga diperoleh :

$$P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n}$$

$$= v^n . P_n$$

Jika $n = 1$ dan $P_1 = 1$, maka $P_0 = v$, adalah nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan 1 tahun kemudian.

Didefinisikan fungsi tingkat diskon d sebagai berikut:

$$d = \frac{i}{(1+i)}$$

$$= i \, . v$$

$$= 1 - v \tag{2.20}$$

Karena v adalah nilai sekarang (*present value*) untuk pembayaran sebesar 1 satuan yang akan dibayarkan 1 tahun kemudian, apabila pembayarannya dilakukan 1 tahun lebih cepat, maka besarnya bunga yang hilang adalah $d = 1 - v$.

2.4.3 Laju Tingkat Suku Bunga (*Force of Interest*)

Tingkat bunga nominal dinyatakan dengan $i^{(k)}$. Untuk suku bunga nominal dan suku bunga diskonto nominal dengan k kali pembayaran dalam satu tahun dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k \qquad (2.21)$$

sehingga:

$$i^{(k)} = k\left((1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right)$$

dan

$$1 - d = \left(1 + \frac{d^{(k)}}{k}\right)^k \qquad (2.22)$$

sehingga :

$$d^{(k)} = k\left(1 - (1-d)^{\frac{1}{k}}\right)$$
$$= k\left(1 - v^{\frac{1}{k}}\right)$$

Dengan k adalah banyaknya pembayaran yang dilakukan dalam 1 tahun.

Dengan menggunakan persamaan (2.21) dan menambahkan fungsi ln dikedua ruas persamaan tersebut diperoleh:

$$ln(1+i) = ln\left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k$$

Dengan :

$$i^{(k)} = k\left(e^{ln(1+i)^{1/k}} - 1\right)$$

Untuk $k \to \infty$ dengan kata lain pembungaannya dapat dilakukan setiap saat, diperoleh nilai δ dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\lim_{k\to\infty} i^{(k)} = ln(1+i) = \delta \qquad (2.23)$$

Sehingga diperoleh:

$\delta = ln(1 + i)$

$$e^{-\delta t} = (1 + i)^{-t} = v^t \qquad (2.24)$$

Dan δ disebut dengan laju tingkat suku bunga (*force of interest*). (*Futami, 1993*)

2.5 Hukum Mortalita

Terdapat tiga prinsip dalam membangkitkan bentuk analitik dari fungsi kehidupan dan mortalitas. Pertama, filosofi yaitu banyak fenomena yang dipelajari dalam ilmu fisika yang dapat dijelaskan secara efisien dengan rumus yang sederhana. Kedua, justifikasi (pembenaran) adalah praktis atau lebih mudah melihat fungsi dengan sedikit parameter daripada melihat sebuah table kehidupan dengan mungkin 100 parameter atau peluang kematian. Ketiga, justifikasi untuk fungsi kehidupan analitik yang sederhana adalah mengurangi perkiraan beberapa parameter fungsi dari data kematian.

Terdapat beberapa jenis fungsi kehidupan dan mortalitas yang berkaitan dengan hukum-hukum tersebut, antara lain:

1. De Moivre (1729)
2. Gompertz (1825)
3. Makeham (1860)
4. Wiebull (1939).

Dalam tulisan ini hanya digunakan Hukum Mortalita yang berdistribusi Gompertz ,Weibull dan Life Table sebagai perhitungan.

2.5.1 Life Table

Misal suatu kelompok masing-masing anggota diobservasi mengenai tingkat kematiannya berdasarkan kelompok umur. Tabel yang diperoleh dari hasil observasi ini berupa life table, tabel mortalita dan tabel penyusutan.

Table 2.1 Tabel Mortalita

X	l_x	d_x	p_x	q_x	e_x^0
0	l_0	d_0	p_0	q_0	e_0^0
1	l_1	d_1	p_1	q_1	e_1^0
2	l_2	d_2	p_2	q_2	e_2^0
.	…	…	…	…	…
.	…	…	…	…	…
50	l_{50}	d_{50}	p_{50}	q_{50}	e_{50}^0
51	l_{51}	d_{51}	p_{51}	q_{51}	e_{51}^0
.	…	…	…	…	…
.	…	…	…	…	…
105	l_{105}	d_{105}	p_{105}	q_{105}	e_{105}^0
106	l_{106}	d_{106}	p_{106}	q_{106}	e_{106}^0

Keterangan:

x : Usia

l_x : Jumlah yang hidup

q_x : Peluang meninggal

d_x : Jumlah yang meninggal

p_x : Peluang hidup

e_x^0 : Nilai harapan hidup

Pada anggota kelompok yang diamati di atas misalkan dilahirkan pada saat yang sama dan jumlahnya $l_{0,}$ selama satu tahun berikutnya jumlah yang meninggal adalah d_0 sehingga yang bisa mencapai umur satu tahun sebanyak $l_{1.}$ Satu tahun berikutnya jumlah yang meninggal adalah d_1 sehingga yang mencapai umur dua tahun sebanyak $l_{2.}$

Untuk usia 50 tahun terdapat sebanyak l_{50} . satu tahun berikutnya jumlah yang meninggal sebanyak d_{50} sehingga yang mencapai usia 51 sebanyak $l_{51.}$ Proses tersebut terus berlangsung sampai terdapat keadaan $l_\omega = 0$ (ω adalah umur terakhir pada table mortalita)

Berdasarkan keterangan tersebut didapatkan hubungan sebagai berikut :

$$l_x - d_x = l_{x+1}$$

Dan jika $n \geq 1$ maka

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \dots + d_{x+n} + l_{x+n}$$

Untuk mencari nilai peluang hidup p_x dan peluang meninggal q_x dapat diperoleh dari :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{2.25}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \tag{2.26}$$

Berdasarkan persamaan-persamaan tersebut maka diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut :

$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x \tag{2.27}$$

$$d_x = l_x . q_x \tag{2.28}$$

$$p_x + q_x = 1 \tag{2.29}$$

$$p_x = 1 - q_x \tag{2.30}$$

(*Futami*, *1993*)

Untuk mencari nilai force of mortality dari life table dapat menggunakan rumus:

$$\mu(x+t) = -\ln \ {}_t p_x \tag{2.31}$$

2.5.2 Hukum Mortalita Gompertz

Survival Distribution Function atau fungsi survival untuk distribusi Gompertz didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} s(x) &= exp\left[-\int_0^x \mu(x)\,dx\right] \\ &= exp\left[-\frac{B}{\ln c}\,(c^x - 1)\right] \\ &= exp[-m(c^x - 1\,)] \end{aligned} \tag{2.32}$$

Dengan $B > 0\,, c > 1\,, x \geq 0$ dan $m = -\frac{B}{\ln c}$.

Dimana *B* adalah peluang kematian data distribusi Gompertz dan *c* adalah jumlah kematian data distribusi Gompertz

Dari fungsi survival tersebut didapatkan Cumulative Distribution Function atau fungsi distribusi kumulatif sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - s(x) \\ &= 1 - exp\left[-\frac{B}{\ln c}\,(c^x - 1)\right] \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dan dari fungsi kumulatif tersebut diperoleh probability distribution function atau fungsi densitas sebagai berikut:

$$f(x) = F'(x)$$
$$= \frac{d}{dx}\left[1 - exp\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right)\right]$$
$$= \left\{-exp\left[-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right]\right\}\frac{d}{dx}\left(-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right)$$
$$= \left\{-exp\left[-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right]\right\}\ (-B\ c^x)$$
$$f(x) = (B\ c^x)exp\left[-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right] \qquad (2.34)$$

Sehingga diperoleh *Force of Mortality*, yaitu:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)}$$
$$= \frac{(B\ c^x)exp\left[-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right]}{exp\left[-\frac{B}{\ln c}\ (c^x - 1)\right]}$$
$$\mu(x) = B\ c^x \qquad (2.35)$$

Dimana $B > 0$, $c > 1$, $x \geq 0$

2.5.3 Hukum Mortalita Weibull

Fungi densitas untuk distribusi Weibull didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x;\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \qquad (2.36)$$

Dimana $x > 0$, $\alpha, \beta > 0$

Dimana:

x : Peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu kematian/kerusakan/kegagalan

α : Parameter bentuk yang menunjukan laju kematian/kerusakan/kegagalan data sebaran weibull

β : Parameter skala yang menunjukan besarnya keragaman data sebaran Weibull

Jika X merupakan peubah acak kontinu dan nilai kepekatan peluang di t adalah $f(t)$, maka fungsi distribusi kumulatif X yaitu:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt \quad ;\text{ untuk } -\infty < x < \infty$$

Sehingga fungsi kumulatif dari distribusi Weibull adalah

$$F(x) = 1 - exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{2.37}$$

(Miller dan Miller, 1992)

Dan fungsi survivalnya yaitu:

$$\begin{aligned} s(x) &= 1 - F(x) \\ &= 1 - \left(1 - exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]\right) \\ &= exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \qquad (2.38) \end{aligned}$$

Fungsi laju tingkat kematian (*force of mortality*), yaitu :

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{f(x)}{s(x)} \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]}{exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \tag{2.39}$$

Dimana $x > 0$, $\alpha, \beta > 0$

2.6 Model Nonlinear

Model nonlinear merupakan bentuk hubungan antara peubah respon dengan peubah penjelas yang tidak linear dalam parameter. Secara umum model nonlinear ditulis sebagai berikut :

$$y_i = f\left(x_{i,}\theta\right) + \varepsilon_i \qquad \text{dimana } i = 1,2,3, \ldots., n \tag{2.40}$$

Dengan :

y_i : Peubah Respon Ke-i

$f\left(x_{i,}\right)$: Fungsi Nonlinear

$x_{i,}$: Peubah Penjelas Respon Ke-i

θ : Parameter

ε_i : Galat Ke-i

ε_i diasumsikan saling bebas dan menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan ragam σ^2.

2.6.1 Metode Pendugaan Kuadrat Terkecil Nonlinear (*Nonlinear Least Square Estimation*)

Misalkan model nonlinear yang dipostulat dengan bentuk :

$$Y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) + \varepsilon \tag{2.41}$$

Misalkan

$X = x_1, x_2, \dots, x_p$

$\theta = \theta_1, \theta, \dots, \theta_p$

maka Persamaan tersebut dapat diringkas menjadi :

$Y = f(X, \theta) + \varepsilon$

dengan asumsi $E(\varepsilon) = 0, Var(\varepsilon) = \sigma^2$, dan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ maka jumlah kuadrat galat untuk model nonlinear di atas didefinisikan sebagai berikut :

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - f(x_i, \theta)\}^2 \left[\frac{\partial f(\hat{\varepsilon}_i, \hat{\theta})}{\partial \theta_i}\right] = 0 \qquad (2.42)$$

Persamaan diatas disebut Persamaan normal untuk model nonlinear.

(Draper and Smith, 1981).

2.7 Asuransi Jiwa

Asuransi Jiwa adalah usaha kerjasama atau koperasi dari sejumlah orang yang sepakat memikul kesulitan keuangan bila terjadi musibah terhadap salah seseorang anggotanya (*R.K Sembiring, 1986*).

2.7.1 Asuransi Jiwa yang Dibayarkan Pada Saat Kematian (Kontinu)

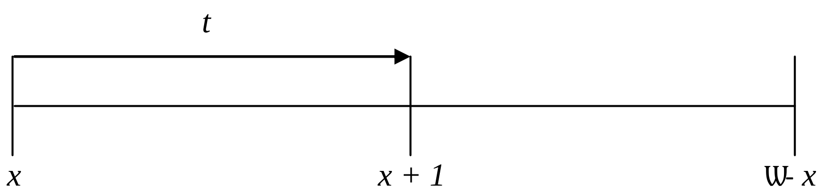
Pada Asuransi dengan perhitungan kontinu, pembayaran benefit kepada ahli waris dilakukan sesaat setelah tertanggung meninggal dunia. Pembayaran benefit adalah pembayaran manfaat kepada ahli waris apabila tertanggung meninggal dunia. Jumlah dan waktu pembayaran manfaat pada asuransi jiwa tergantung pada panjang interval dari dikeluarkannya polis sampai tertanggung meninggal dunia. Dalam model ini, terdapat fungsi manfaat (b_t) dan fungsi diskon (v_t). Fungsi v_t adalah nilai sekarang dari pembayaran b_t dan t adalah panjang interval pada saat polis dikeluarkan sampai dengan x meninggal dunia. Keduanya membentuk suatu peubah acak yang dilambangkan dengan Z_t yaitu fungsi pembayaran yang didefinisikan sebagai berikut:

$$Z_t = b_t \, . \, v_t \qquad (2.43)$$

Z_t adalah nilai tunai atau premi pada saat polis dikeluarkan. Waktu yang tersisa dari waktu pada saat polis dikeluarkan sampai tertanggung meninggal adalah variable acak waktu hidup yang tersisa dari si tertanggung x, yaitu $T = T(x)$.

2.7.1.1 Asuransi Jiwa Berjangka (*Term Life Insurance*)

Asuransi jiwa berjangka adalah suatu asuransi yang membayarkan manfaat kepada ahli waris tertanggung apabila si tertanggung meninggal dunia selama jangka waktu polis asuransi yang telah ditentukan.



Gambar 2.1 Sistem Pembayaran benefit pada asuransi jiwa berjangka

Besarnya manfaat (b_t) sebesar satu satuan diberikan pada akhir periode dimana tertanggung meninggal dunia, maka:

$$b_t = \begin{cases} 1 & ; t \leq n \\ 0 & ; t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad ; t \geq 0$$

$$Z_t = \begin{cases} v^t & ; T \leq n \\ 0 & ; T > n \end{cases}$$

Nilai premi tunggal untuk asuransi jiwa berjangka n tahun dengan manfaat sebesar 1 satuan adalah:

$$E[Z_t] = E[v^t] = \bar{A}_{\acute{x}:\overline{n|}} \tag{2.44}$$

$$\bar{A}_{\acute{x}:\overline{n|}} = \int_0^n Z_t\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^n v^t\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^n v^t\ \ {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \tag{2.45}$$

2.7.2 Asuransi yang dibayarkan di Akhir Tahun Setelah Kematian (Diskrit)

Pada Asuransi dengan perhitungan diskrit, pembayaran benefit kepada ahli waris nasabah dilakukan pada akhir periode dimana tertanggung meninggal dunia. Dalam model fungsi curtate-future-lifetime, terdapat fungsi benefit atau santunan (b_{k+1}) dan fungsi diskon v_{k+1}. Keduanya membentuk suatu peubah acak yang dilambangkan dengan Z_{k+1} yang didefinisikan sebagai berikut:

$$Z_{k+1} = b_{k+1} \,.\, v_{k+1} \tag{2.46}$$

Karena $K(x)$ adalah peubah acak dari sisa waktu hidup nasabah atau waktu dari dikeluarkannya polis sampai waktu meninggalnya nasabah, maka Z_{k+1} adalah fungsi peubah acak (*Actuarial Present Value*) pembayaran benefit pada saat polis asuransi dikeluarkan.

2.7.2.1 Asuransi Jiwa Berjangka (*Term Life Insurance*)

Asuransi jiwa berjangka adalah suatu asuransi yang membayarkan benefit atau santunan kepada ahli waris nasabah apabila si nasabah meninggal dunia selama jangka waktu asuransi dan diberikan pada akhir periode dimana tertanggung meninggal dunia.

Besarnya manfaat (b_{k+1}) sebesar satu satuan diberikan pada akhir periode dimana tertanggung meninggal dunia, maka:

$b_{k+1} = 1 \quad ; k = 0 , 1 , 2 , \ldots , n-1$

$v_{k+1} = v^{k+1}$

Nilai premi tunggal dari asuransi jiwa berjangka n tahun dengan benefit sebesar 1 satuan adalah

$$Z_{k+1} = A_{\acute{x}:\overline{n|}} \tag{2.47}$$

$$A_{\acute{x}:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, P(K=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k}p_x \,.\, q_{x+k} \tag{2.48}$$

(*Bowers,1997*).

2.8 Anuitas (*Annuity*)

Anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu yang dilakukan setiap selang waktu dan lama tertentu secara berkelanjutan. Jika pembayaran dilakukan tergantung hidup matinya seseorang disebut anuitas hidup.

2.8.1 Anuitas Hidup Kontinu (*Continous Life Annuity*)

Anuitas hidup adalah serangkaian pembayaran yang bersifat periodik dan pembayarannya hanya akan dilakukan apabila orang yang ditunjuk masih hidup pada saat pembayaran jatuh tempo. Anuitas hidup sebesar satu satuan per akhir tahun yang pembayarannya dilakukan secara kontinu atau setiap saat disebut anuitas hidup kontinu.

Dengan nilai sekarang dari pembayaran anuitas tersebut dinotasikan dengan peubah acak Y, yaitu

$$Y = \bar{a}_{T} \qquad ; T \geq 0 \tag{2.49}$$

Maka nilai anuitas hidup untuk asuransi jiwa berjangka n tahun dapat dicari dengan:

$$\bar{a}_{\acute{x}:\overline{n|}} = E[\bar{a}_{T}] = \int_0^n v^t \,.\ \ {}_t p_x \ dt \tag{2.50}$$

Atau

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\acute{x}:\overline{n|}} &= E\left[\frac{1-v^n}{\delta}\right] = \int_0^n \frac{1-v^n}{\delta}\ f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\int_0^n v^t\ f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\bar{A}_{\acute{x}:\overline{n|}}\end{aligned} \tag{2.51}$$

(*Bowers,1997*).

2.9 Premi Asuransi Jiwa

Premi adalah biaya yang harus dibayarkan oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi sebagai imbalan persetujuan penanggung untuk membayar manfaat yang telah disepakati dalam polis asuransi jika orang yang ditanggung meninggal dunia.

Ada tiga unsur utama yang menentukan perhitungan premi asuransi jiwa, yaitu:

a. Mortalitas (Harapan hidup)
b. Suku bunga
c. Periode, yaitu waktu masa pertanggungan. (R.K. Sembiring, 1986)

Premi asuransi dapat dibayarkan sekaligus atau secara berkala. Premi yang dibayarkan sekaligus disebut premi tunggal, sedangkan premi tetap berkala dapat dibayarkan per tahun, per tri wulan dan per bulan serta dilakukan pada permulaan setiap selang waktu yang disebut premi tahunan.

Premi asuransi terbagi menjadi dua macam, yaitu premi netto dan premi bruto. Premi netto adalah premi yang dibayarkan pemegang polis atau konsumen berdasarkan perkiraan tingkat mortalita dan perkiraan tingkat suku bunga, sedangkan tingkat biaya tidak dipergunakan. Premi netto dihitung atas dasar prinsip keseimbangan antara pemasukan dan pengeluaran, yaitu nilai tunai dari premi netto yang akan diterima oleh perusahaan asuransi di waktu yang akan datang harus sama dengan nilai tunai dari benefit atau santunan yang akan dibayarkan oleh perusahaan asuransi. Premi netto tidak mencakup nilai biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi. Sedangakan premi brutto atau gross premium adalah pembayaran Premi yang mengandung nilai biaya-biaya tersebut.

2.9.1 Fungsi Kerugian

Pada saat polis asuransi ditandatangani terdapat dua jenis kewajiban didalamnya, yaitu:

1. Kewajiban pihak perusahaan asuransi adalah membayar manfaat yang besarnya sesuai perjanjian yang telah di tetapkan diawal kontrak manakala sewaktu-waktu terjadi klaim
2. Kewajiban pihak nasabah adalah membayar premi langsung sekaligus diawal kontrak atau secara berkala pada setiap periode yang telah ditentukan.

Kedua jenis kewajiban tersebut membentuk suatu fungsi total kerugian polis asuransi yang disimbolkan dengan L. Untuk penanggung, L adalah perbedaan antara nilai sekarang dari santunan dan nilai sekarang dari pembayaran premi (Bowers, 1997).

Nilai kerugian (L) ini merupakan peubah acak dari nilai sekarang dari santunan yang dibayarkan oleh penanggung tak sebanyak premi anuitas yang dibayarkan oleh tertanggung.

Besarnya kerugian yang akan ditanggung oleh pihak perusahaan asuransi dapat dihitung dengan :

$$L = l(T) = v^t - \bar{P}\bar{a}_T \qquad (2.52)$$

Resiko kerugian perusahaan terjadi ketika nilai kerugiannya memberikan nilai positif, dimana nilai santunan yang dibayarkan kepada pihak nasabah lebih besar dari premi yang diterima oleh pihak perusahaan asuransi. Secara teoritis nilai kerugian yang positif terjadi ketika pihak nasabah meninggal dunia pada awal kontrak asuransi.

2.9.2 Prinsip Ekuivalen (*Equivalence Principle*)

Prinsip ekuivalen menyatakan bahwa ekspektasi dari fungsi kerugian adalah sama dengan nol. Prinsip ekuivalen ini digunakan untuk mengantisipasi kerugian yang akan diterima oleh perusahan asuransi pada periode tertentu, sehingga jumlah manfaat yang akan dikeluarkan oleh perusahaan asuransi akan sebanding dengan besarnya nilai premi yang harus dibayarkan oleh nasabah kepada perusahaan asuransi.

Prinsip ekuivalen mempunyai syarat bahwa:

$$E[L] = 0 \tag{2.53}$$

Maka:

$$E[Nilai\ Sekarang\ Santunan - Nilai\ Sekarang\ Premi] = 0$$

$$E[Nilai\ Sekarang\ Santunan] = E[Nilai\ Sekarang\ Premi]$$

Berdasarkan fungsi kerugian dan prinsip ekuivalen, maka untuk premi yang akan dibayarkan kontinu ($\bar{P}$), nilai sekarang dari kerugian untuk penanggung jika meninggal terjadi pada saat t dan jumlah santunan yang harus diberikan kepada nasabah sebesar B satuan adalah:

$$l(T) = B\,.\,v^T - \bar{P}\bar{a}_T \tag{2.54}$$

Karena $T(x)$ merupakan peubah acak, maka dengan prinsip ekuivalen diperoleh:

$$E[L] = E[B\,.\,v^T - \bar{P}\bar{a}_T] = 0$$

$$B\,.\,E[v^T] - \bar{P}\,.\,E[\bar{a}_T] = 0$$

$$\bar{P} = \frac{B\,.E[v^T]}{E[\bar{a}_T]} \tag{2.55}$$

Sehingga diperoleh nilai premi bersih dari produk asuransi jiwa berjangka n tahun yaitu:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{\acute{x}:\overline{n}|}\right) = \frac{B\,.\,\bar{A}_{\acute{x}:\overline{n}|}}{\bar{a}_{\acute{x}:\overline{n}|}} \tag{2.56}$$

Sehingga diperoleh Premi tahunan untuk produk asuransi jiwa berjangka dengan $B = 1$ satuan yaitu:

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{\acute{x}:\overline{n}|}\right) = \frac{\bar{A}_{\acute{x}:\overline{n}|}}{\bar{a}_{\acute{x}:\overline{n}|}} \tag{2.57}$$