II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull adalah distribusi yang paling banyak digunakan untuk waktu hidup dalam tekhnik ketahanan. Distribusi ini adalah distribusi serbaguna yang dapat mengambil karakteristik dari jenis distribusi lain, berdasarkan pada nilai dari bentuk parameter, (fepslutc, 2011).

2.1.1 Fungsi kepekatan peluang (fkp) distribusi Weibull dua parameter

Misal *x* adalah peubah acak, maka fkp dari peubah acak Weibull dengan parameter bentuk dan parameter skala θ akan dinotasikan oleh

$$f_W\ (x;\beta,\theta) = \beta\theta^{\beta} x^{\beta-1} e^{-(x\ \ )^{\beta}} \qquad ; \quad ,^{-} > 0$$

(Gupta dan Kundu, 2001).

2.2 Distribusi Eksponensial Umum

Distribusi eksponensial umum (*Generalized Exponential Distrubution*) pertama kali diperkenalkan oleh Gupta dan Kundu pada tahun 1999. Distribusi ini diambil dari salah satu fungsi kepadatan kumulatif yang digunakan pada pertengahan abad

19 (Gompertz-Verhulst) untuk membandingkan tabel kematian dan menghasilkan laju pertumbuhan penduduk, (Gupta dan Kundu, 1999).

2.2.1 Fungsi Kepekatan Peluang (fkp) Distribusi Eksponensial Umum

Misal *x* adalah peubah acak, maka fkp dari peubah acak distribusi eksponensial umum dengan parameter bentuk ~ dan parameter skala *λ* akan dinotasikan oleh

$$f_{GE}(x;\sim,ª) = \sim ª(1-e^{-ªx})^{\sim-1}e^{-ªx} \qquad ;\ \sim,ª > 0$$

(Gupta dan Kundu, 1999)

2.3 Metode Penduga Kemungkinan Maksimum *(Maximum Likelihood Estimators)*

Metode penduga kemungkinan maksimum diperkenalkan oleh Fisher pada tahun 1922. Metode ini dilakukan untuk mencari dugaan dari parameter-parameter suatu distribusi dengan memaksimumkan fungsi peluang atau fungsi kepekatannya.

Definisi 2.8

Misalkan x_1, x_2,..., x_n merupakan sampel acak berukuran n dengan fungsi kepekatannya $f(x_i;¯)$, maka

$$L(¯) = f(x_1;¯)\,f(x_2;¯)\ldots f(x_n;¯)$$
$$L(¯) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;¯) = L(¯\,|\,X)$$

Dimana *X* digunakan untuk mengindikasi data sampel. Pendugaan parameter dengan metode ini diawali dengan membangun fungsi kemungkinan untuk memperoleh nilai dugaan parameter. Biasanya jika mengalami kesulitan dalam penyelesaian penduga parameter dengan metode ini, maka dalam pengerjaannya dapat diatasi dengan menggunakan logaritma atau fungsi ln dari fungsi kemungkinan, yaitu:

$$\ln L(\theta | X) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i ; \theta)$$

Nilai parameter yang maksimum dimaksimumkam dengan fungsi pendugaan kemungkinan maksimum ini, umumnya disimbolkan dengan $\hat{\theta}$. Karena logaritma merupakan fungsi monotonik, maka nilai maksimum L bisa disamakan dengan maksimum ln L. Fungsi kemungkinan dan fungsi logaritma itu dinilai sebagai *θ*, yang biasanya disimbolkan dengan L atau ln L.

Sehingga kondisi memaksimumkan ln L adalah dengan menurunkannya terhadap parameternya, dimana hasil turunannya sama dengan nol:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Itulah yang disebut dengan fungsi kemungkinan maksimum *(Maximum Likelihood function)*, (Greene, 2000).

2.4 Metode Newton-Raphson

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul di dalam beberapa disiplin ilmu pengetahuan, seperti bidang fisika, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa *(engineering)*. Sering sekali persoalan itu muncul dalam bentuk yang tidak ideal atau rumit. Persoalan yang rumit ini adakalanya tidak bisa diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusi sejatinya *(exact solution)* sehingga dapat diselesaikan dengan metode numerik.

Komputer berperan besar dalam perkembangan bidang metode numerik karena selain mempercepat perhitungan numerik, juga dapat mencoba berbagai kemungkinan solusi yang terjadi akibat perubahan beberapa parameter. Solusi yang diperoleh juga dapat ditingkatkan ketelitiannya dengan mengubah-ubah nilai parameternya. Mencari akar-akar (penyelesaian) suatu persamaan yang dinyatakan dalam bentuk $f(x) = 0$ adalah suatu hal-hal yang banyak dijumpai dalam matematika dan sains. Diantara semua metode pencari akar, metode Newton-Raphsonlah yang paling terkenal dan banyak dipakai dalam terapan sains dan rekayasa. Metode ini paling disukai karena konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya.

Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode Newton-Raphson, yaitu:

1. Penurunan rumus Newton-Raphson secara geometri. Misal $f(x) = 0$ adalah suatu persamaan yang mempunyai akar x dan f dapat didiferensialkan, sehingga $y = f(x)$ memiliki garis singgung di setiap titik pada kurva fungsinya.

Misal radien garis singgung di x_n adalah

$$m = f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

Atau

$$f'(x_r) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

Sehingga prosedur iterasi metode Newton Raphson adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , f'(x_n) \neq 0$$

2. Penurunan rumus Newton-Raphson dengan bantuan deret Taylor

   Uraikan $f(x_{n+1})$ disekitar x_n kedalam deret Taylor:

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} f''(t), \quad x_n < t < x_{n+1}$$

   jika dipotong sampai suku orde ke-2 menjadi

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

   Dan karena persoalan mencari akar, maka $f(x_{n+1}) = 0$, sehingga

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , f'(x_n) \neq 0$$

   Yang merupakan rumus metode Newton-Raphson.

Kondisi iterasi metode Newton-Raphson berhenti apabila

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Atau bila menggunakan galat relatif hampiran

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| < \delta$$

Dengan ε dan δ adalah toleransi galat yang diinginkan.

Langkah-langkah metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut:

1. Masukkan nilai awal x_0 sembarang
2. Tentukan persamaan fungsi $f(x_n)$ dan turunan pertamanya
3. Masukkan persamaan fungsi $f(x_n)$ dan turunan pertamanya ke dalam rumus Newton-Raphson sampai dengan eror$< \varepsilon$, sehigga diperoleh nilai akar fungsi, (Bambang Triatmojo, 2002).

2.5 Keluarga Eksponensial

Anggap suatu keluarga $\{f(x;\text{¯}) : \text{¯} \in \Omega\}$ dari fungsi kepekatan peluang, dimana Ω adalah himpunan *interval* $\Omega = \{\text{¯} : \text{¥} < \text{¯} < \text{¢}\}$, dengan ¥ dan ¢ konstan, maka

$$f(x;\text{¯}) = \exp[p(\text{¯})K(x) + S(x) + q(\text{¯})], \qquad a < x < b$$

$$= 0 \qquad\qquad , \qquad \text{selainnya.}$$

Suatu distribusi dikatakan sebagai anggota dari distribusi eksponensial apabila:

1. *a* dan *b* tidak bergantung pada *θ*, $-\infty < \theta < \infty$,
2. $p(\theta)$ adalah fungsi kontinu nontrivial bagi *θ*, $-\infty < \theta < \infty$
3. Masing-masing dari $K'(x) \neq 0$ dan *S(x)* adalah fungsi kontinu bagi *x*, *a<x<b.*

Dimana ketiganya merupakan syarat suatu *regular case* dari keluarga eksponensial. Jika ketiganya tidak terpenuhi, maka dikatakan *irregular case* dari keluarga eksponensial, (Hogg dan Craig, 1978).

2.6 Informasi Fisher

Misalkan X merupakan peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang (fkp) $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ dimana ruang parameternya Ω interval. Dianggap kasus khusus, yang kadang disebut dengan *regular case,* dari fkp yang didiferensialkan dengan tanda integral. Pada bagian ini menjelaskan bahwa parameter *θ* tidak tampak pada bagian akhir interval $f(x;\theta) > 0$. Dengan asumsi ini, dapat dijelaskan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)dx = 1$$

Jika diturunkan terhadap *θ* maka akan menjadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)dx = 0$$

Dan dapat dijabarkan menjadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta}}{f(x;\theta)} f(x;\theta)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} f(x;\theta)dx = 0$$

Kemudian jika diturunkan kembali akan menghasilkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2} f(x;\theta) + \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta} \right] dx = 0$$

Sehingga diambil bagian yang kedua yang merupakan bagian dari persamaan di atas dan dapat ditulis dengan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} \frac{\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta}}{f(x;\theta)} f(x;\theta)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} \right]^2 f(x;\theta)dx$$

Maka yang disebut dengan informasi fisher dengan disimbolkan sebagai $I(\theta)$ adalah

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} \right] f(x;\theta)dx$$

Atau dapat ditulis dengan

$$I(\theta) = -\int \frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2} f(x;\theta)dx$$

(Hogg dan Craig, 1978).

2.7 Matriks Informasi Fisher

Misal sampel acak X_1, X_2, ..., X_n dari suatu sebaran dengan fungsi kepekatan peluang $f(x;\beta_1,\beta_2),(\beta_1,\beta_2)\in\Omega$ di mana kondisi keteraturan ada. Tanpa menggambarkan kondisi ini secara rinci, misalkan dikatakan bahwa ruang di X dimana $f(x;\beta_1,\beta_2)>0$ tidak mengandung β_1 dan β_2, dan dapat menurunkan bawah tanda integral.

Sehingga matriks informasi fishernya adalah

$$I_n = \begin{bmatrix} E\left\{\left[\dfrac{\partial \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_1}\right]^2\right\} & E\left\{\dfrac{\partial \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_1}\dfrac{\partial \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_2}\right\} \\ E\left\{\dfrac{\partial \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_1}\dfrac{\partial \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_2}\right\} & E\left\{\left[\dfrac{\partial \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_2}\right]^2\right\} \end{bmatrix}$$

$$I_n = -\begin{bmatrix} E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_1^2}\right] & E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}\right] \\ E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}\right] & E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(X;\beta_1,\beta_2)}{\partial \beta_2^2}\right] \end{bmatrix}$$

(Hogg dan Craig, 1978).

2.8 Teorema Nilai Tengah

Untuk membuktikan sifat asimtotik normalitas suatu distribusi, maka dibutuhkan teori yang mendukung tentang nilai tengah. Berikut ini dijelaskan mengenai teorema nilai tengah.

Teorema 2.1

Jika f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan terdiferensial pada titik-titik dalam dari (a, b), maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a, b) dimana

$$\frac{f(b)-(f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Atau, setara juga dengan

$$f(b) - (f(a) = f'(c)(b-a)$$

(Purcell dan Varberg, 2000)

2.9 Teorema Limit Pusat

Untuk membuktikan sifat asimtotik suatu distribusi, juga dibutuhkan teori yang mendukung tentang limit pusat. Berikut ini dijelaskan mengenai teorema limit pusat.

Teorema 2.2

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyimbolkan observasi sebuah peubah acak dari sebuah distribusi dengan nilai tengah adalah μ dan ragam positif σ^2. Sehingga peubah acak $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n-\mu)}{\sigma}$ memiliki pendekatan distribusi normal dengan nilai tengah nol dan ragam satu, (Hogg dan Craig, 1995).

2.10 Sifat Asimtotik Normalitas Penduga Kemungkinan Maksimum

Penduga kemungkinan maksimum *(maximum likekihood estimators)* merupakan penduga yang lebih atraktif karena jumlah sampelnya yang besar atau sifat asimtotiknya. Salah satu sifat asimtotik dari penduga kemungkinan maksimum adalah asimtotik normalitas.

Penduga kemungkinan maksimum dikatakan asimtotik normalitas apabila

$$\hat{\theta}_{ML} \overset{a}{\sim} N\left[\theta, \{I(\theta)\}^{-1}\right]$$

Dimana $I(\theta) = -\frac{1}{n} E\left[\frac{\partial^{2l} L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right]$

Dengan kata lain, penduga kemungkinan maksimum disebut dengan asimtotik normalitas apabila

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N\left[0, \{I(\theta)\}^{-1}\right]$$

(Greene, 2000).

2.11 Uji Rasio Kemungkinan *(Likelihood Ratio Test)*

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n melambangkan n peubah acak independen yang memiliki masing-masing fungsi kepekatan peluang $f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, ..., \theta m)$, i=1, 2,..., n. Himpunan yang terdiri dari semua titik parameter $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta m)$ dinotasikan oleh Ω, yang disebut ruang parameter. Misalkan μ menjadi sebuah subset dari ruang parameter Ω.

Misalkan hipotesis H_0: $(\bar{\ }_1, \bar{\ }_2, \ldots, \bar{\ }m) \in \mu$ merupakan semua hipotesis alternatif. Definisi fungsi kemungkinan:

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \bar{\ }_{1,} \bar{\ }_2, \ldots, \bar{\ }_m), \qquad (\bar{\ }_1, \bar{\ }_2, \ldots, \bar{\ }m) \in \mu$$

Dan

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \bar{\ }_{1,} \bar{\ }_2, \ldots, \bar{\ }_m), \qquad (\bar{\ }_1, \bar{\ }_2, \ldots, \bar{\ }m) \in \Omega$$

Misalkan $L(\hat{\mu})$ dan $L(\hat{\Omega})$ maksimum, yang di asumsikan ada dari dua fungsi kemungkinan. Rasio dari $L(\hat{\mu})$ ke $L(\hat{\Omega})$ disebut rasio kemungkinan *(likelihood ratio)* dan dinotasikan oleh

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L = \frac{L(\hat{\mu})}{L(\hat{\Omega})}$$

(Hogg dan Craig, 1978).