II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Deret Waktu (*time series*)

Time series merupakan serangkaian observasi terhadap suatu variabel yang diambil secara beruntun berdasarkan interval waktu yang tetap (Wei, 2006). Rangkaian data pengamatan *time series* dinyatakan dengan variabel X_t dimana t adalah indeks waktu dari urutan pengamatan.

2.2 Stasioneritas

Stasioner berarti bahwa tidak terdapat perubahan drastis pada data. Fluktuasi data berada disekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak tergantung pada waktu dan variansi dari fluktuasi tersebut.

Stasioneritas dibagi menjadi 2 yaitu :

1. Stasioner dalam rata-rata

   Stasioner dalam rata-rata adalah fluktuasi data berada di sekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak bergantung pada waktu dan variansi dari fluktuasi tersebut. Dari bentuk plot data seringkali dapat di ketahui bahwa data tersebut stasioner atau tidak stasioner. Apabila dilihat dari plot ACF, maka nilai-nilai autokorelasi dari data stasioner akan turun menuju nol sesudah time *lag* (selisih waktu) kelima atau keenam.

2. Stasioner dalan variansi

   Sebuah data *time series* dikatakan stasioner dalam variansi apabila struktur dari waktu ke waktu mempunyai fluktuasi data yang tetap atau konstan dan tidak berubah-ubah. Secara visual untuk melihat hal tersebut dapat dibantu dengan menggunakan plot *time series*, yaitu dengan melihat fluktuasi data dari waktu ke waktu (Wei, 2006).

2.3 Pembedaan

Pembedaan digunakan untuk mengatasi data yang tidak stasioner dalam rata-rata. Pembedaan di bagi menjadi dua yaitu pembedaan biasa dan pembedaan musiman.

2.3.1 Pembedaan Biasa

Ketika data tidak mempunyai rata-rata yang konstan, kita dapat membuat data baru dengan rata-rata konstan dengan cara pembedaan data, artinya kita menghitung perubahan pada data secara berturut-turut. Pembedaan pertama atau d=1 dirumuskan :

$$W_t = X_t - X_{t-1}$$

Jika pembedaan pertama d=1 belum membuat seri data mempunyai rata-rata yang konstan, maka dilakukan pembedaan ke-2 atau d=2 yang berarti kita menghitung perbedaan pertama dari perbedaan pertama. Kita definisikan W^*_t sebagai pembedaan pertama dari z_t sehingga rumus untuk pembedaan kedua d=2 sebagai berikut :

$$W_t = W^*_t - W^*_{t-1}$$
$$= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})$$

(Pankratz, 1991).

2.3.2 Pembedaan Musiman

Pembedaan musiman berarti menghitung pergeseran data secara musiman berdasarkan periode waktu tertentu, biasanya dinotasikan s untuk menstimulasi rata-rata dalam seri menjadi konstan. Untuk data kuartalan, s = 4 ; untuk data bulanan, s = 12 dan seterusnya. Sebuah data seri mungkin cukup dilakukan dengan pembedaan biasa, cukup dengan pembedaan musiman saja atau kedua-keduanya. Misalkan didefinisikan D adalah derajat pembedaan musiman (berapa kali pembedaan musiman dilakukan). Jika d=0 dan pembedaan musiman (D=1) dihitung untuk semua t sebagai

$$W_t = X_t - X_{t-s}$$

Jika transformasi telah digunakan untuk menstabilkan varian, pembedaan musiman digunakan untuk X_t. Pembedaan musiman digunakan untuk menghapus sebagian besar data musiman (Pankratz, 1991).

2.4 Transformasi *Box-Cox*

Untuk menstabilkan varian dalam suatu data seri digunakan transformasi *Box-Cox*. Transformasi log dan akar kuadrat merupakan anggota dari keluarga *power* *transformation* yang disebut *Box-Cox Transformation* (Box and Cox, 1964). Dengan transformasi ini kita mendefinisikan seri baru x'_t sebagai

$$x'_t = \frac{x_t{}^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

dimana λ adalah bilangan real. Jika nilai $\lambda = 1/2$ maka disebut transformasi akar karena $x_t^{1/2}$ adalah akar dari x_t (Pankratz, 1991).

2.5 Fungsi Autokorelasi dan Fungsi Autokorelasi Parsial

Dalam metode *time series*, alat utama untuk mengidentifikasi model dari data yang akan diramalkan adalah dengan menggunakan fungsi autokorelasi/*Autocorrelation Function* (ACF) dan fungsi autokorelasi parsial/*Partial Autocorrelation Function* (PACF).

2.5.1 Fungsi Autokorelasi

Dari proses stasioner suatu data *time series* (X_t) diperoleh E (X_t) = μ dan variansi Var (X_t) = E (X_t - μ)^2 = σ^2 , yang konstan dan kovarian Cov (X_t,X_{t+k}), yang fungsinya hanya pada perbedaan waktu $|t- (t-k)|$. Maka dari itu, hasil tersebut dapat ditulis sebagai kovariansi antara X_t dan X_{t+k} sebagai berikut :

$$\gamma = \text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)$$

dan korelasi antara X_t dan X_{t+k} didefinisikan sebagai

$$\rho_k = \frac{Cov\ (X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var\ (X_t) Var\ (X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

dimana notasi $Var\ (X_t)\ dan\ Var\ (X_{t+k}) = \gamma_0$. Sebagai fungsi dari k, γ_k disebut fungsi autokovarian dan ρ_k disebut fungsi autokorelasi (ACF). Dalam analisis *time series*, γ_k dan ρ_k menggambarkan kovarian dan korelasi antara X_t dan X_{t+k} dari proses yang sama, hanya dipisahkan oleh *lag* ke-k.

Fungsi autokovariansi γ_k dan fungsi autokorelasi ρ_k memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. γ_0= Var (X_t) ; $\rho_0 = 1$.
2. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_k| \leq 1$.
3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$ dan $\rho_k = \rho_{-k}$ untuk semua k, γ_k dan ρ_k adalah fungsi yang sama dan simetrik *lag* k=0. Sifat tersebut diperoleh dari perbedaan waktu antara X_t dan X_{t+k}. Oleh sebab itu, fungsi autokorelasi sering hanya diplotkan untuk *lag* nonnegatif. Plot tersebut kadang disebut korrelogram (Wei, 2006).

Pendugaan koefisien (r_k) adalah dugaan dari koefisien autokorelasi secara teoritis yang bersangkutan (ρ_k) . Nilai r_k tidak sama persis dengan ρ_k yang berkorespondensi dikarenakan *error* sampling. Distribusi dari kemungkinan nilai-nilai disebut dengan distribusi sampel. Galat baku dari distribusi sampling adalah akar dari penduga variansinya.

Pengujian koefisien autokorelasi :

H_0 : ρ_k = 0 (Koefisien autokorelasi tidak berbeda secara signifikan)

H_1 : $\rho_k \neq 0$ (Koefisien autokorelasi berbeda secara signifikan)

Statistik uji : t $= \frac{r_k}{SE\ r_k}$

dengan :

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(x_t-\bar{x})(x_{t+k}-\bar{x})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2} \qquad \text{dan} \qquad SE\ (r_k) = \sqrt{\frac{1+2\sum_{j=1}^{k-1} {r_j}^2}{T}} \approx \frac{1}{\sqrt{T}}$$

dengan :

SE (r_k): *standard error* autokorelasi pada saat *lag* k

r_j : autokorelasi pada saat *lag* j

k : time *lag*

T : banyak observasi dalam data *time series*

Kriteria keputusan : tolak H_0 jika nilai $|t_{hitung}| > t_{\alpha/2,df}$ dengan derajat bebas *df* = T-1, T merupakan banyaknya data dan *k* adalah *lag* koefisien autokorelasi yang diuji (Pankratz, 1991).

2.5.2 Fungsi Autokorelasi Parsial

Autokorelasi parsial digunakan untuk mengukur tingkat keeratan antara X_t dan X_{t+k}, apabila pengaruh dari *time lag* 1, 2, 3, . . . , dan seterusnya sampai k-1 dianggap terpisah . Ada beberapa prosedur untuk menentukan bentuk PACF yang salah satunya akan dijelaskan sebagai berikut. Fungsi autokorelasi parsial dapat dinotasikan dengan:

corr $(X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3,\ldots,} X_{t+k})$

misalkan X_t adalah proses yang stasioner dengan $E(X_t) = 0$, selanjutnya X_{t+k} dapat dinyatakan sebagai model linear

$$X_{t+k} = \emptyset_{k1}X_{t+k-1}, \emptyset_{k2}X_{t+k-2}, \dots, \emptyset_{kk}X_t + \varepsilon_{t+k} \quad (2.1)$$

dengan $\emptyset_{ki}$ adalah parameter regresi ke-i dan ε_{t+k} adalah nilai kesalahan yang tidak berkorelasi dengan X_{t+k-j} dengan j=1,2, … , k. Untuk mendapatkan nilai PACF, langkah pertama yang dilakukan adalah mengalikan persamaan (2.1) dengan X_{t+k-j} pada kedua ruas sehingga diperoleh :

$$X_{t+k-j}X_{t+k} = \emptyset_{k1}X_{t+k-1}X_{t+k-j} + \emptyset_{k2}X_{t+k-2}X_{t+k-j} + \dots + \emptyset_{kk}X_tX_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k}X_{t+k-j}$$

Selanjutnya nilai harapannya adalah

$$E(X_{t+k-j}X_{t+k}) = E(\emptyset_{k1}X_{t+k-1}X_{t+k-j} + \emptyset_{k2}X_{t+k-2}X_{t+k-j} + \dots + \emptyset_{kk}X_tX_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k}X_{t+k-j})$$

Dimisalkan nilai $E(X_{t+k-j}X_{t+k}) = \gamma_j$, j=0,1,…,k dan karena $E(\varepsilon_{t+k}\, X_{t+k-j}) = 0$, maka diperoleh

$$\gamma_j = \emptyset_{k1}\gamma_{j-1} + \emptyset_{k2}\gamma_{j-2} + \cdots + \emptyset_{kk}\gamma_{j-k} \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) dibagi dengan γ_0

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \emptyset_{k1}\frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} + \emptyset_{k2}\frac{\gamma_{j-2}}{\gamma_0} + \cdots + \emptyset_{kk}\frac{\gamma_{j-k}}{\gamma_0}$$

diperoleh

$$\rho_j = \emptyset_{k1}\rho_{j-1} + \emptyset_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{j-k}, \text{ j = 1,2,3,…,k}$$

dan diberikan $\rho_0 = 1$

untuk j = 1, 2, 3 ,…, k didapatkan sistem persamaan sebagai berikut :

$$\rho_1 = \emptyset_{k1}\rho_0 + \emptyset_{k2}\rho_1 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-1},$$

$$\rho_2 = \emptyset_{k1}\rho_1 + \emptyset_{k2}\rho_0 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-2}, \qquad (2.3)$$

$$\vdots$$

$$\rho_k = \emptyset_{k1}\rho_{k-1} + \emptyset_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_0,$$

Sistem persamaan (2.3) dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer. Persamaan (2.3) untuk j = 1, 2, 3, …, k digunakan untuk mencari nilai-nilai fungsi autokorelasi parsial *lag* k yaitu $\emptyset_{k1}, \emptyset_{k2}, \dots, \emptyset_{kk}$.

a. Untuk *lag* pertama (k = 1) dan (j = 1) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

   $\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_{0,}$ karena $\rho_0 = 1$ sehingga $\rho_1 = \emptyset_{11}$ yang berarti bahwa fungsi autokorelasi parsial pada *lag* pertama akan sama dengan fungsi autokorelasi pada *lag* pertama.

b. Untuk *lag* kedua (k = 2) dan (j = 1,2) diperoleh sistem persamaan

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1$$

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 \qquad (2.4)$$

persamaan (2.4) jika ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}$, dan dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh

$$\emptyset_{22} = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

c. Untuk *lag* ketiga (k = 3) dan (j = 1,2,3) diperoleh sistem persamaan

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_2$$

$$\rho_2 = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 + \emptyset_{33}\rho_1$$

$$\rho_3 = \emptyset_{11}\rho_2 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_0 \qquad (2.5)$$

persamaan (2.5) jika ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{22} \\ \emptyset_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{bmatrix}$ dan dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh

$$\emptyset_{33} = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

d. Untuk k *lag* j = 1,2,3,…, k diperoleh sistem persamaannya adalah

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_2 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_2 = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 + \emptyset_{33}\rho_1 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\rho_3 = \emptyset_{11}\rho_2 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_0 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-3}$$

$$\vdots \qquad (2.6)$$

$$\rho_k = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_2 + \emptyset_{33}\rho_3 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_0$$

Persamaan (2.6) jika dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{22} \\ \emptyset_{33} \\ \vdots \\ \emptyset_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

dengan aturan Cramer diperoleh

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix}$$

Nilai autokorelasi parsial *lag* k hasilnya adalah

$$\emptyset_{kk} = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

dengan $\emptyset_{kk}$ disebut PACF antara X_t dan X_{t+k}.

Fungsi autokorelasi parsial (PACF)

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Jadi diperoleh autokorelasi parsial dari X_t pada *lag* k didefinisikan sebagai

$$\emptyset_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

Himpunan dari $\emptyset_{kk}\{\emptyset_{kk}\,; k = 1,2, \ldots\}$, disebut sebagai *Partial Autocorrelation Function* (PACF). Fungsi $\emptyset_{kk}$ menjadi notasi standar untuk autokorelasi parsial antara observasi X_t dan X_{t+k} dalam analisis *time series*. Fungsi $\emptyset_{kk}$ akan bernilai nol untuk k > p. Sifat ini dapat digunakan untuk identifikasi model AR dan MA, yaitu pada model *Autoregressive* berlaku ACF akan menurun secara bertahap menuju nol dan *Moving Average* berlaku ACF menuju ke-0 setelah lag ke-q sedangkan nilai PACF model AR yaitu $\emptyset_{kk}$ = 0, k > p dan model MA yaitu $\emptyset_{kk}$ = 0, k > q

Hipotesis untuk menguji koefisien autokorelasi parsial adalah sebagai berikut

H_0 : $\emptyset_{kk} = 0$

H_1 : $\emptyset_{kk} \neq 0$

Taraf signifikansi : α = 5%

Statistik uji : $t = \frac{\emptyset_{kk}}{SE\ (\emptyset_{kk})}$

dengan :

$SE\ (\emptyset_{kk}) = \frac{1}{T}$

Kriteria keputusan :

Tolak *H_0* jika t hitung > $t_{\frac{\alpha}{2},df}$, dengan derajat bebas *df* = T-1, T adalah banyaknya data dan k adalah *lag* autokorelasi parsial yang akan diuji (Wei, 2006).

2.6 Proses *White Noise*

Suatu proses {ε_t} disebut proses *white noise* jika data terdiri dari variabel acak yang tidak berkorelasi dan berdistribusi normal dengan rata-rata konstan E (ε_t) = 0, variansi konstan Var (ε_t) = σ^2 dan γ_k = Cov ($\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}$) = 0 untuk k ≠ 0.

Dengan demikian proses *white noise* stasioner dengan fungsi autokovariansi

$$\gamma_k \begin{cases} \sigma^2, jika\ k = 0 \\ 0\ , jika\ k \neq 0 \end{cases}$$

Fungsi autokorelasi

$$\rho_k \begin{cases} 1\ , jika\ k = 0 \\ 0\ , jika\ k \neq 0 \end{cases}$$

Fungsi autokorelasi parsial

$$\varphi_{kk} \begin{cases} 1\ , jika\ k = 0 \\ 0\ , jika\ k \neq 0 \end{cases}$$

Proses *white noise* dapat dideteksi menggunakan uji autokorelasi residual pada analisis *error*-nya. Uji korelasi residual digunakan untuk mendeteksi ada tidaknya korelasi residual antar *lag*. Langkah-langkah pengujian korelasi residual yaitu : *H_0* : $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = 0$ (residual tidak terdapat korelasi)

H_1 : $\exists\ \rho_k \neq 0$, k= 1, 2, …, K (residual terdapat autokorelasi)

Taraf signifikansi α = 5%

Statistik uji *Ljung Box-Pierce*. Rumus uji *Ljung Box-Pierce* :

$$Q_k = T(T+2)\sum_{k=1}^{K}\frac{\hat{\rho}_k{}^2}{T-k}$$

dengan

T : banyaknya data

K : banyaknya *lag* yang diuji

$\hat{\rho}_k$: dugaan autokorelasi residual periode k

Kriteria keputusan yaitu tolak H_0 jika Q-hitung > $\mathcal{X}^2_{(\alpha,df)}$ tabel , dengan derajat kebebasan K dikurangi banyaknya parameter pada model (Wei, 2006).

2.7 Model *Autoregressive*

2.7.1 Order pertama *Autoregressive*, AR(1)

Pertama, diberikan persamaan *time series* stasioner sebagai

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\propto} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

$$= \mu + \sum_{i=0}^{\propto} \psi_i B^i \varepsilon_i$$

$$= \mu + \Psi(B)\epsilon_t$$

dimana $\Psi(B) = \sum_{i=0}^{\propto} \psi_i B^i$. Dengan pendekatan eksponensial $\psi_i = \phi^i$ dimana $|\phi| < 1$ sehingga dapat ditulis

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2 \ \ \varepsilon_{t-2} + \cdots \tag{2.7}$$

diperoleh

$$x_{t-1} = \mu + \varepsilon_{t-1} + \phi\varepsilon_{t-2} + \phi^2 \ \ \varepsilon_{t-3} + \cdots \tag{2.8}$$

Kita dapat mengkombinasikan persamaan (2.7) dan (2.8) sebagai

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \underbrace{\phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2 \ \ \varepsilon_{t-2} + \cdots}_{= \phi x_{t-1} - \phi\mu}$$

$$= \ \mu - \phi\mu + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.9}$$

$$= \ \delta + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

dimana $\delta = \mu - \phi\mu$. Persamaan (2.9) disebut order pertama proses *autoregressive* karena pada persamaan (2.9) merupakan regresi dari x_t pada x_{t-1} karenanya disebut *autoregressive* proses.

Proses AR (1) stasioner jika $|\phi| < 1$. Rata-rata dari AR(1) yang stasioner adalah :

$$E(x_t) = \ \mu = \frac{\delta}{1-\phi}$$

Autokovarian dari AR (1) dapat dihitung dari persamaan (2.7)

$$\gamma_y(k) = \sigma^2\phi^k \frac{1}{1-\ \phi^2} \quad \text{untuk k = 0, 1, 2, …}$$

Nilai varian diberikan sebagai:

$$\gamma_y(0) = \sigma^2 \frac{1}{1-\ \phi^2}$$

Hubungan dengan fungsi autokorelasi diberikan sebagai:

$$\rho(k) = \frac{\gamma_y(k)}{\gamma_y(0)} \qquad \text{untuk k = 0, 1, 2, 3,…}$$

Ini menyebabkan proses stasioner AR (1) turun secara eksponensial

(Montgomery, 2008).

2.7.2 Order Kedua *Autoregressive*, AR(2)

Dari persamaan (2.9) diperoleh persamaan *autoregressive* orde kedua

$$x_t = \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

dapat ditulis

$$(1 - \phi_1(B) \quad - \phi_2(B)^2 \quad)x_t = \delta + \varepsilon_t$$

Fungsi autokovarian adalah

$$\begin{aligned} \gamma_y(k) &= cov\ (x_t, x_{t-k}) \\ &= cov\ (\ \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t, x_{t-k}) \\ &= \phi_1 cov(x_{t-1}, x_{t-k}\ ) + \phi_2 cov(x_{t-2}, x_{t-k}) + cov(, \varepsilon_t x_{t-k}) \\ &= \phi_1 \gamma_y(k-1) + \phi_2 \gamma_y(k-2) + \begin{cases} \sigma^2 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

sehingga

$$\gamma_y(0) \ = \phi_1 \gamma_y(1) + \phi_2 \gamma_y(2) + \sigma^2$$

$$\gamma_y(k) \ = \phi_1 \gamma_y(k-1) + \phi_2 \gamma_y(k-2) \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) disebut persamaan *Yule-Walker* untuk $\gamma_y(k)$. Dengan cara yang sama kita peroleh fungsi autokorelasi dari pembagian persamaan (2.10) dengan $\gamma_y(0)$:

$\rho_y(k) \ = \phi_1 \rho_y(k-1) + \phi_2 \rho_y(k-2) \quad k = 1, 2, \ldots$ (Montgomery, 2008).

2.7.3 Bentuk Umum Model *Autoregressive*, AR(p)

Bentuk umum orde ke-p model *Autoregressive* adalah

$$x_t = \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \tag{2.11}$$

Dimana ε_t *white noise*. Persamaan (2.11) dapat juga ditulis

$$\Phi(\mathrm{B})x_t = \delta + \varepsilon_t$$

dimana $\Phi(\mathrm{B}) = 1 - \phi_1 B \quad - \phi_2 B^2 \quad - \cdots - \phi_p B^p$.

untuk AR (p) stasioner

$$E(x_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}$$

dan

$$\gamma_y(k) = cov\ (x_t, x_{t-k})$$

$$= cov\ (\ \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t, x_{t-k})$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{p} \phi_i\, cov(x_{t-i}, x_{t-k}\ ) + cov(\varepsilon_t, x_{t-k}) \qquad (2.12)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \gamma_y(k - i) + \begin{cases} \sigma^2\ jika\ k = 0 \\ 0\ \ jika\ k > 0 \end{cases}$$

Kemudian kita peroleh

$$\gamma_y(0) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \gamma_y(i) + \sigma^2$$

$$\Rightarrow\ \gamma_y(0) \left[1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho_y(i) \right] = \sigma^2$$

Hasil pembagian persamaan (2.12) dengan $\gamma_y(0)$untuk k > 0 dapat digunakan untuk mencari nilai ACF pada proses AR(p) yang memenuhi persamaan *Yule-Walker*

$\rho_y(k) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \rho_y(k - i)$ k = 1, 2, … (Montgomery, 2008).

2.8 Model *Moving Average*

Model *moving average* dengan order q dinotasikan MA (q) didefinisikan sebagai :

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad ; \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$

dengan :

x_t : nilai variabel pada waktu ke-t

ε_t : nilai-nilai error pada waktu t

θ_i : koefisien regresi, i: 1,2,3, …,q

q : order MA

persamaan di atas dapat ditulis dengan operator *backshift* (B), menjadi :

$$x_t = \mu + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q)\, \varepsilon_t$$

$$= \mu + (1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i)\, \varepsilon_t$$

$$= \mu + \Theta(B)\, \varepsilon_t$$

dimana $\Theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i$

Karena ε_t *white noise*, nilai harapan MA (q) adalah

$$E(x_t) = E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})$$

$$= \mu$$

dan varian

$$Var(x_t) = \gamma_y(0) = Var(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})$$

$$= \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai autokovarian pada *lag* k

$$\gamma_y(k) = \mathrm{Cov}\,(x_t, x_{t+k})$$

$$= E\,[(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})\,(\mu + \varepsilon_{t+k} - \theta_1 \varepsilon_{t+k-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t+k-q})]$$

$$= \begin{cases} \sigma^2\left(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q\right) & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Diperoleh nilai autokorelasi pada *lag* k yaitu

$$\rho_y(k) = \frac{\gamma_y(k)}{\gamma_y(0)} = \begin{cases} \dfrac{(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q)}{1 + \theta_1{}^2 + \dots + \theta_q{}^2} & , k = 1, 2, 3, \dots q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Dari bagian ini diperoleh bahwa nilai ACF sangat membantu mengindentifikasi model MA dan order *cut off* tepat setelah *lag* q (Montgomery, 2008).

2.8.1 Order pertama *Moving Average*, MA(1)

Model paling sederhana dari *Moving Average* yakni MA(1) ketika nilai q =1

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

untuk model MA (1) kita peroleh nilai *autocovariance function*

$$\gamma_y(0) = \sigma^2(1 + \theta_1{}^2)$$
$$\gamma_y(1) = -\theta_1 \quad \sigma^2$$
$$\gamma_y(k) = 0 \quad k > 1$$

Demikian pula, kita peroleh fungsi autokorelasi

$$\rho_y(1) = \frac{-\theta_1}{\left(1 + \theta_1{}^2\right)}$$

$$\rho_y(k) = 0 \qquad k > 1$$

Kita dapat lihat bahwa *lag* pertama fungsi autokorelasi pada MA (1) dibatasi

$$|\rho_y(1)| = \frac{|\theta_1|}{(1+\theta_1{}^2)} \leq \frac{1}{2}$$

dan autokorelasi *cut off* setelah *lag* 1 (Montgomery, 2008).

2.8.2 Order kedua *Moving Average,* MA(2)

Model *Moving Average* lain yang berguna adalah MA (2),

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

$$= \mu + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\, \varepsilon_t$$

Fungsi autocovarian dan autokorelasi untuk model MA (2) yaitu

$$\gamma_y(0) = \sigma^2(1+\theta_1{}^2 + \theta_2{}^2)$$
$$\gamma_y(1) = \sigma^2\,(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)$$
$$\gamma_y(2) = \sigma^2\,(-\theta_2)$$
$$\gamma_y(k) = 0 \quad k > 1$$

dan

$$\rho_y(1) = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1{}^2 + \theta_2{}^2}$$

$$\rho_y(2) = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1{}^2 + \theta_2{}^2}$$

$\rho_y(k) = 0 \qquad k > 2$ (Montgomery, 2008).

2.9 Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA)

Dalam bentuk umum, model *Autoregressive Moving Average* atau ARMA(p,q) diberikan sebagai

$$x_t = \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$= \delta + \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

atau $\Phi(B)x_t = \delta + \Theta(B)\varepsilon_t$ (Wei, 2006).

2.10 Model *Autoregresive Integrated Moving Average* (ARIMA)

Jika d adalah bilangan bulat nonnegative, maka $\{X_t\}$ dikatakan proses ARIMA jika $Y_t := (1 - B)^d x_t$ merupakan akibat dari proses ARMA.

Definisi diatas berarti bahwa$\{X_t\}$ memenuhi persamaan :

$$\phi^*(B)X_t \equiv \phi(B)(1-B)^d x_t = \theta(B)\varepsilon_t, \ \ \{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

Dengan $\phi(B)$ dan $\theta(B)$ adalah derajat polinomial dari p dan q, $\phi(B) \neq 0$ untuk $|\phi(B)| < 1$ (Brockwell, 2002).

2.11 *Seasonal* Proses

Data *time series* terkadang memiliki pola musiman. Hal ini sering kali menunjukkan data *time series* mempunyai nilai musiman. Ini sering terjadi ketika data mempunyai pola interval yang spesifik (bulan, minggu, dll). Salah satu cara merepresentasikan data seperti ini adalah dengan mengasumsikan model mempunyai dua komponen

$$x_t = S_t + N_t$$

dengan S_t adalah komponen dengan faktor musiman s dan N_t adalah komponen stokastik yang mungkin merupakan model ARMA.

Karena S_t dengan faktor musiman s kita dapatkan $S_t = S_{t+s}$ atau

$$S_t - S_{t+s} = (1-B^s)\, S_t = 0$$

Gunakan (1 - B^s) pada persamaan $x_t = S_t + N_t$, kita peroleh

$$\underbrace{(1-B^s)\, x_t}_{= W_t} = \underbrace{(1-B^s)\, S_t}_{= 0} + (1-B^s)\, N_t$$

$$W_t = (1-B^s)\, N_t$$

proses w_t dapat dikatakan *seasonally stationary* . Karena proses ARMA dapat digunakan pada model N_t , dalam bentuk umum kita diperoleh

$$\Phi(B)w_t = (1 - B^s)\, \Theta(B)\varepsilon_t \qquad \text{dengan } \varepsilon_t \textit{ white noise}$$

Kita dapat menganggap S_t sebagai proses stokastik. Kita mengasumsikan setelah dilakukan pembedaan musiman (1-B^s), (1-B^s)x_t = w_t menjadi stasioner. Itulah kenapa tidak dilakukan eliminasi pada data musiman. Maka setelah dilakukan pembedaan musiman data mungkin tetap menunjukkan autokorelasi pada *lag* s, 2s, … . Sehingga model *seasonal* ARMA adalah

$$(1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \cdots - \Phi_P B^{Ps})w_t = (1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \cdots - \Theta_Q B^{Qs})\varepsilon_t$$

Model ini merepresentasikan jika autokorelasi terjadi pada *lag* s, 2s, … . Oleh karena itu bentuk umum *seasonal* ARMA dari order (p,d,q) x (P,D,Q) dengan periode s adalah

$$\Phi_P(B^s)\, \emptyset_p\, (B)(1-B)^d\, (1-B^s)^D X_t = \Theta_Q\, (B^s)\, \theta_q\, (B)\varepsilon_t$$

Contoh :

Model ARIMA (0, 1, 1) × (0, 1, 1) dengan s = 12 adalah

$$(1-B)^{d}\ (1-B^{s})^{D}y_{t} = \left(1-\theta B - \quad \Theta B^{12} + \Theta\theta B^{13}\right)\varepsilon_{t}$$

Untuk proses ini, nilai autokovarian adalah

$$\gamma_{y}(0) = \mathrm{Var}\ (w_{t}) = \sigma^{2}(1+{\theta_{1}}^{2} + {\Theta_{1}}^{2} - (\Theta\theta)^{2})$$
$$= \sigma^{2}\ (1+{\theta_{1}}^{2})(1+{\Theta_{1}}^{2})$$

$$\gamma_{y}(1) = Var\ (w_{t}, w_{t-1}) = \sigma^{2}\ (-\theta_{1} + \Theta_{1}(-\Theta\theta))$$

$$= \theta_{1}\sigma^{2}\ (1 - {\Theta_{1}}^{2})$$

$$\gamma_{y}(2) = \gamma_{y}(3) = \cdots = \gamma_{y}(10) = 0$$

$$\gamma_{y}(11) = \sigma^{2}\ \theta_{1}\Theta_{1}$$

$$\gamma_{y}(12) = -\sigma^{2}\Theta_{1}(1+{\theta_{1}}^{2})$$

$$\gamma_{y}(13) = \sigma^{2}\ \theta_{1}\Theta_{1}$$

$\gamma_{y}(j) = 0 \quad j > 13$ (Montgomery, 2008).

2.12 Pendugaan Parameter

Maximum likelihood estimation merupakan salah satu metode dalam pendugaan parameter. Metode ini menggunakan prinsip memaksimumkan fungsi *likelihood* untuk menduga parameter θ dan ϕ pada model ARIMA. Diberikan bentuk umum model ARMA (p,q) sebagai berikut :

$$x_{t} = \delta + \phi_{1}x_{t-1} + \phi_{2}x_{t-2} + \cdots + \phi_{p}x_{t-p} + \varepsilon_{t} - \theta_{1}\varepsilon_{t-1} - \theta_{2}\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_{q}\varepsilon_{t-q}$$

atau

$$\varepsilon_t = \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q} - x_t - \delta - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \cdots - \phi_p x_{t-p}$$

dimana $\varepsilon_t \sim N\,(0, \sigma^2)$, fungsi kepekatan peluang dari $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots., \varepsilon_n)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathrm{P}(\varepsilon \mid \phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon{}^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon{}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon{}^2}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t{}^2]$$

Kita dapat menuliskan fungsi *likelihood* dari parameter $(\phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon{}^2)$.

$$\ln L\,(\phi, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon{}^2) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma_\varepsilon{}^2 - \frac{S(\phi,\mu,\theta)}{2\sigma_\varepsilon{}^2}, \qquad (2.15)$$

dimana

$\mathrm{S}(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t{}^2$, adalah *sum square function.* Nilai pendugaan ϕ, μ, θ diperoleh ketika memaksimumkan persamaan (2.15) yang kemudian kita menyebut sebagai pendugaan *maximum likelihood* . Setelah diperoleh nilai pendugaan ϕ, μ, θ, maka dapat dihitung pula nilai pendugaan dari $\sigma_\varepsilon{}^2$ dari

$$\sigma_\varepsilon{}^2 = \frac{\mathrm{S}(\phi, \hat{\mu}, \hat{\theta})}{df}$$

dengan *df* = (n - p) – (p + q + 1) = n – (2p + q + 1) (Wei, 2006).

2.13 Kriteria Pemilihan Model Terbaik

Salah satu pemilihan model terbaik dari beberapa model yang sesuai dapat berdasarkan nilai AIC (*Akaike's Information Criterion*) dan SBC (*Schwarz Bayesian Criteria*), rumus AIC dan SBC :

AIC = T ln (MSE) + 2k

SBC = T ln (MSE) + k ln (T)

dimana :

MSE $= \frac{1}{T-k}\ (SSE)$

SSE $= \sum_{t=0}^{T}(x_t - \widehat{x_t})^2$

k = jumlah parameter yang diduga

T = jumlah pengamatan

Nilai minimum pada AIC dan SBC mengindikasikan model terbaik (Yafee, 2000).