II. FUNGSI-FUNGSI KHUSUS

Pada bab ini akan dijabarkan mengenai fungsi-fungsi khusus yang digunakan untuk menyederhanakan hasil pencarian fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t*. Fungsi Gamma dan Beta merupakan fungsi-fungsi khusus yang sering muncul dalam pemecahan persamaan differensial, proses fisika, perpindahan panas, gesekan sumber bunyi, rambatan gelombang, potensial gaya dan persamaan gelombang. Fungsi Gamma dan Beta merupakan fungsi dalam bentuk pernyataan integral.

2.1 Fungsi Gamma

Definisi 1

Fungsi gamma dinyatakan dengan $\Gamma(z)$ adalah generalisasi dari fungsi faktorial.

Fungsi gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

Dimana z adalah bilangan real positif (z>0) dan konvergen untuk z>0.

Lemma 1. $\Gamma(1)=1$

Bukti :

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1$$

(Sahoo, 2013)

2.2 Fungsi Beta

Definisi 2

Misalkan α dan β adalah dua bilangan real positif . Fungsi beta dinyatakan dengan $B(\alpha,\beta)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

Corollary 1

Untuk setiap $\alpha>0$ dan $\beta>0$, fungsi beta adalah simetrik:

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$$

Corollary 2

Untuk setiap $\alpha>0$ dan $\beta>0$,fungsi beta dapat di dinyatakan sebagai:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^{\alpha+\beta}}ds$$

(Sahoo, 2013)

2.3 Hubungan Fungsi Beta dengan Fungsi Gamma

Teorema 1

Misalkan α dan β adalah dua bilangan real positif. Maka

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Dimana $\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ adalah fungsi gamma.

Bukti

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-y}dy\right)\\
&= \left(\int_0^\infty u^{2\alpha=2}e^{-u^2}\,2udu\right)\left(\int_0^\infty v^{2\beta-2}e^{-v^2}\,2vdv\right)\\
&= 4\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2\alpha-1}v^{2\beta-1}e^{-\left(u^2+v^2\right)}du\,dv\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty r^{2\alpha+2\beta-2}(\cos\theta)^{2\alpha-1}(\sin\theta)^{2\beta-1}e^{-r^2}\,rdrd\theta\\
&= \left(\int_0^\infty \left(r^2\right)^{\alpha+\beta-1}e^{-r^2}\,dr^2\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2\alpha-1}(\sin\theta)^{2\beta-1}d\theta\right)\\
&= \Gamma(\alpha+\beta)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2\alpha-1}(\sin\theta)^{2\beta-1}d\theta\right)\\
&= \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt\\
&= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

(Sahoo, 2013)

2.4 Aproksimasi Stirling dari Fungsi Gamma

Definisi 3

Rumus aproksimasi Stirling dari fungsi gamma digunakan untuk mentransformasi fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Rumus aproksimasi Stirling dari fungsi gamma adalah:

$$\Gamma(az+b) = \sqrt{2\pi}e^{-az}(az)^{az+b-\frac{1}{2}}$$

(Abramowitz dan Stegun,1972)