III. DISTRIBUSI *t* DAN DISTRIBUSI *GENERALIZED t*

3,1 Distribusi *t*

Distribusi student pertama kali diterbitkan pada tahun 1908 dalam suatu makalah oleh Gosset. Pada waktu itu, Gosset bekerja pada perusahaan bir Irlandia yang melarang penerbitan penelitian oleh karyawannya. Untuk mengelakkan larangan ini dia menerbitkan karyanya secara rahasia dibawah nama ‘Student’. Karena itulah Distribusi *t* biasanya disebut *Distribusi Student*. Distribusi *t* merupakan salah satu keluarga distribusi peluang kontinu yang penurunannya berdasarkan distribusi normal baku dan distribusi khi-kuadrat. Kemudian proses penurunannya menggunakan teknik transformasi peubah acak. Distribusi *t* umumnya digunakan di bidang keuangan dan manajemen risiko, terutama untuk model pengembalian aset bersyarat. Bollerslev (1987) menggunakan Student-*t* untuk model distribusi hasil nilai tukar asing.

Teorema 2

(Student *t* distribution)

Misal peubah acak

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U / r}}$$

dimana Z adalah peubah acak berdistribusi normal baku N(0,1) dan U adalah peubah acak berdistribusi Khi-kuadrat $\chi^2(r)$ dengan derajat kebebasan dk=r. Kedua peubah acak Z dan U saling bebas. Maka peubah acak T dikatakan berdistribusi *t*, jika dan hanya jika fungsi kepekatannya berbentuk:

$$f(t) = \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{\pi r}.\Gamma(r/2).(1+t^2/r)^{(r+1)/2}} \; ; -\infty < t < \infty$$

(Hogg et al:2013)

Bukti

$$g(z,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} u^{r/2-1} e^{-u/2}, -\infty < z < \infty, \quad 0 < u < \infty$$

Distribusi peluang kumulatif $F(t) = P(T \le t)$ dari T diperoleh

$$\begin{aligned} F(t) &= P\left(Z/\sqrt{U/r} \le t\right) \\ &= P\left(Z \le \sqrt{U/r}t\right) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\sqrt{(u/r)}t} g(z,u)\,dz\,du \end{aligned}$$

bahwa,

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(r/2)} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\sqrt{(u/r)}t} \frac{e^{-z^2/2}}{2^{(r+1)/2}} dz \right] u^{r/2-1} e^{-u/2} du$$

Fungsi kepekatan peluang (fkp) dari T merupakan turunan dari distribusi peluang kumulatif, kita peroleh

$$F(t) = F'(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(r/2)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(u/2)(t^2/r)}}{2^{(r+1)/2}} \sqrt{\frac{u}{r}}\, u^{r/2-1} e^{-u/2} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(r/2)} \int_0^\infty \frac{u^{(r+1)/2-1}}{2^{(r+1)/2}} e^{-(u/2)(1+t^2/r)} du$$

misal

$y = (1 + t^2/r)u,$ maka $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{1}{1+t^2/r}$

sehingga,

$$f(t) = \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{\pi r}\Gamma(r/2)} \left[\frac{1}{(1+t^2/r)^{(r+1)/2}} \right] \int_0^\infty \frac{y^{(r+1)/2-1}}{\Gamma[(r+1)/2]2^{(r+1)/2}} e^{-y/2} dy$$

Bentuk integral diatas menunjukkan bahwa *f(x)* sama dengan 1, karena bentuk integral menyerupai fkp dari distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas r+1. Dengan demikian fkp menjadi

$$f(t) = \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{\pi r}.\Gamma(r/2).(1+t^2/r)^{(r+1)/2}} ; -\infty < t < \infty$$

(Hogg et al:2013)

Selanjutnya akan dijabarkan mengenai fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* yang akan dibahas dalam penelitian ini, yang kemudian akan ditentukan fungsi karakteristik dan pembuktian sifat-sifat dasar fungsi karakteristik dari fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t.*

3.2 Distribusi Generalized t

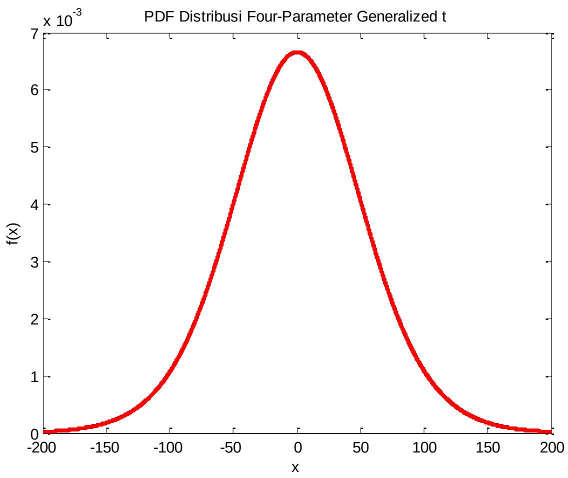
Distribusi *four-parameter generalized t* merupakan perumuman dari distribusi t. Distribusi *four-parameter generalized t* memiliki empat parameter yaitu parameter bentuk (p,q), parameter lokasi (μ) dan parameter skala (σ). B sebagai fungsi beta.

Definisi 4

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized t* dengan parameter μ,σ, p,dan q jika fungsi kepekatannya adalah :

$$f(x;\mu,\sigma,p,q)=\frac{p}{2\sigma q^{\frac{i}{p}}B\left(\frac{1}{p},q\right)\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}};-\infty<x<\infty;p,q,\sigma>0;\mu\in R$$

(Chan et al:2007)



Gambar 1. Grafik Fungsi Kepekatan Peluang dari Distribusi *four-parameter generalized t* dengan p=1, q=20, σ=100, dan μ=0

3.3 Pembuktian Fungsi Kepekatan Peluang (fkp) Distribusi *Four-Parameter Generalized t*

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized t* dengan parameter μ,σ, p, dan q jika fungsi kepekatannya adalah :

$$f\left(x;\mu,\sigma,p,q\right)=\frac{p}{2\sigma q^{\frac{i}{p}}B\left(\frac{1}{p},q\right)\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}};-\infty<x<\infty;p,q,\sigma>0;\mu\in R$$

Bukti:

$f\left(x\right)$ adalah fungsi kepekatan peluang

Oleh karena batas x pada fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* adalah $-\infty<x<\infty$, dan berdasarkan simulasi grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* diperoleh grafik plot yang simetri pada μ, maka berdasarkan teorema simetri berlaku:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx = 2\int_{\mu}^{\infty} f\left(x\right)dx$$

Maka,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= 2\int_{\mu}^{\infty} f\left(x\right)dx\\
&= 2\int_{\mu}^{\sim}.\frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}}B\left(\frac{1}{p},q\right)\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}}dx\\
&= \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}}B\left(\frac{1}{p},q\right)}\int_{\mu}^{\sim}.\frac{p}{\left[1+\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}}dx\end{aligned}$$

misal $y = \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}$

$$y^2 = \left(\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right)^2$$

$$y^2 = \frac{1}{q^2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2p}$$

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2p} = y^2 q^2$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \left(y^2 q^2\right)^{\frac{1}{2p}}$$

$$x = y^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} \sigma + \mu$$

Maka,

$$dx = \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma\, dy$$

Batas

$$\begin{aligned} x &= \mu \quad \Rightarrow \quad y = 0 \\ x &= \infty \quad \Rightarrow \quad y = \infty \end{aligned}$$

Sehingga persamaannya menjadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\tilde{}} . \frac{1}{\left[1+y\right]^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma\, dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{\left[1+y\right]^{\frac{1}{p}+q}} \, dy$$

Karena $B\left(\frac{1}{p}, q\right) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{\left(1+y\right)^{\frac{1}{p}+q}} \, dy$, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} B\left(\frac{1}{p}, q\right)$$

$$= 1$$

■

Jadi $f(x)$ merupakan fungsi kepekatan peluang.