IV. FUNGSI KARAKTERISTIK

Pada bagian selanjutnya akan dijabarkan mengenai fungsi karakteristik. Pada penelitian ini akan ditentukan fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan menggunakan definisi dan kemudian akan membuktikan fungsi karakteristik yang diperoleh dengan menggunakan ekspansi trigonometri, dari kedua cara tersebut akan diperoleh fungsi karakteristik yang sama.

4.1 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dan statistika. Fungsi karakteristik merupakan fungsi pembangkit momen dengan menambahkan *i* sebagai bagian imaginer atau momen dari (*itx*) atau ekspektasi dari e^{itx}

Definisi 5

Fungsi karakteristik $\left(\phi_x\right)$ dari peubah acak X, didefinisikan sebagai nilai ekspetasi dari e^{itx}, di mana i adalah bagian imaginer dan $t \in \boldsymbol{R}$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

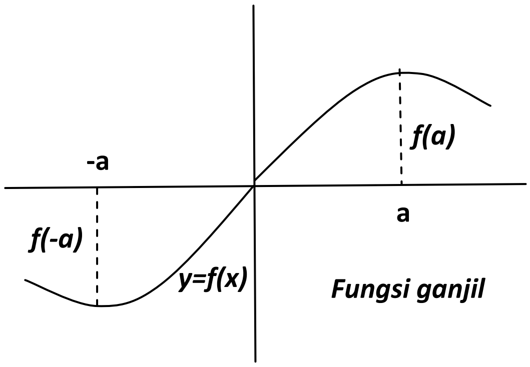
$$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \; f(x) dx \qquad (1)$$

dimana $\phi_x(t) = E(e^{itx}) = E[\cos(tX) + i\sin(tX)]$ (2)

$$= E\cos(tX) + E\, i\sin(tX)$$

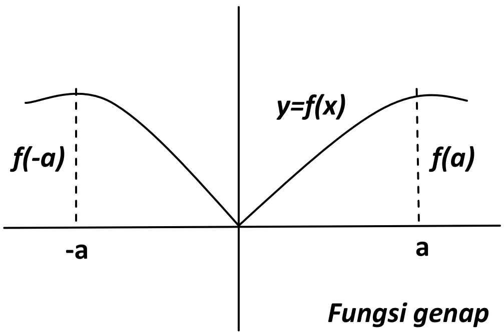
Dan F_x merupakan fungsi kumulatif dari distribusi *X*, sedangkan $f(x)$ merupakan fungsi kepakatan peluang dari distribusi *X*. (Dudewicz &Mishra, 1995)

4.2 Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap



Definisi 6

Fungsi *f* disebut fungsi ganjil, bila $f(-a) = -f(a)$. grafik dari fungsi ganjil simetri terhadap titik asal (titik pusat koordinat).

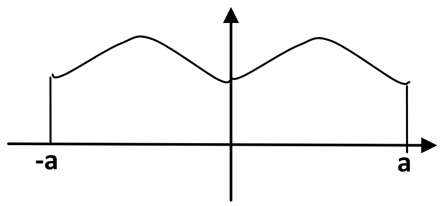


Definisi 7

Fungsi f disebut fungsi genap, bila $f(-a) = f(a)$. grafik dari fungsi genap simetri terhadap sumbu-y.

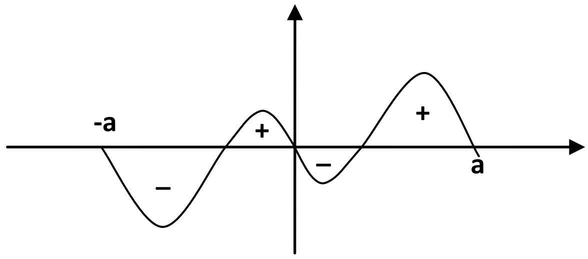
(Purcell et al:2013)

4.3 Teorema Simetri



Jika f fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Jika f fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Bukti untuk f genap

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Misal $u = -x,\; du = -dx$

Jika f genap, $f(u) = f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)(-dx)$$

$$= -\int_{-a}^{0} f(u)(du)$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)(du)$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)(dx)$$

Oleh karena itu,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(Purcell et al:2013)

Pada bagian selanjutnya akan dijabarkan mengenai ekspansi deret MacLaurin, deret ini akan digunakan pada ekspansi e^{tx} untuk menentukan fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t.*

4.4. Ekspansi Deret MacLaurin

Deret MacLaurin digunakan untuk membantu menyelesaikan suatu persamaan dengan mengekspresikannya sehingga dapat lebih mudah menyelesaikannya

Definisi 8

Sebuah fungsi *f (x)* memiliki turunan pada x = b dapat diperluas dengan deret Taylor berikut :

$$f(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(x-b)^3 + \cdots$$

Jika b = 0 , kita mendapatkan kasus khusus yang sering disebut deret Maclaurin ;

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

jika $f(x) = e^x$, sehingga semua turunan $f(x) = e^x$ adalah $f^{(r)}(x) = e^x$, maka $f^{(r)}(0) = 1$, untuk *r* = 1, 2, 3, ….

Dengan demikian , ekspansi deret Maclaurin dari $f(x) = e^x$ adalah

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(Hogg et al:2013)

4.5 Power Series

Definisi 9

Dalam kalkulus dasar banyak tentang kasus khusus dari deret pangkat. Deret Pangkat di *x* memiliki bentuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

(Purcell et al:2013)

4.6 Teorema Keunikan (Uniqueness Theorem)

Teorema 3

Misalkan bahwa *f* memenuhi

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

Untuk semua x di beberapa interval di sekitar a , maka

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Bukti

Akan ditentukan $c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots$, diketahui bahwa

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

Kemudian turunan dari *f(x)* diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \\ f''(x) &= 2!c_2 + 3!c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 3!c_3 + 4!c_4(x-a) + 5\cdot 4\cdot 3c_5(x-a)^2 + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Subtitusikan x= a untuk mencari c_n, maka diperoleh

$$c_0 = f(a)$$
$$c_1 = f'(a)$$
$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$
$$c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

Dan secara umum diperoleh

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

(Purcell et al:2013)

Pada bagian selanjutnya akan dijabarkan mengenai sifat-sifat dasar fungsi karateristik yang akan digunakan untuk membuktikan apakah fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* memenuhi sifat sifat dasar fungsi karakteristik.

4.7 Sifat-sifat Dasar dari Fungsi Karakteristik

Suatu fungsi karakteristik harus memenuhi sifat-sifat dasar dari fungsi karakteristik. Berikut ini akan dibahas tentang sifat-sifat dasar yag harus dipenuhi oleh fungsi karateristik dari suatu distribusi.

Teorema 4

Misalkan X adalah peubah acak dengan fungsi karakteristik $f(t) = \phi_x(t) = E(e^{itX})$.

Maka

(i) $f(0)=1$

(ii) $|f(t)|\leq 1$

(iii) $f(-t)=\overline{f(t)}$. . [$\overline{f(t)}$ adalah konjugat kompleks dari $f(t)$.]

Bukti:

(i). Misalkan $f(t)=\phi_x(t)=E\left[e^{itX}\right]$ untuk t=0. Maka berlaku

$$
\begin{aligned}
\phi_x(t) &= E\left[e^{itX}\right] \\
\phi_x(0) &= E\left[e^{0}\right] \\
&= E[1] \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(ii). Misalkan *X* adalah sebarang peubah acak dengan fungsi peluang *f(x)*.

Berdasarkan definisi $e^{itx} = Cos\,(t\,x) + i\,Sin\,(t\,x)$ diketahui bahwa

$\left|e^{itX}\right|^2 = \cos^2(tX) + \sin^2(tX) = 1$.

Sehingga

$$
\begin{aligned}
|\phi_x(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}\, dF\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itX}\right| dF \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 1\, dF \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(iii). Misalkan $\overline{\phi_x(t)}$ adalah sekawan dari fungsi karakteristik $\phi_x(t)$. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
\phi_x(t) &= E\left[e^{itX}\right] \\
&= E\left[\cos(tX) + i\sin(tX)\right] \\
&= E\left[\cos(tX)\right] + E\left[i\sin(tX)\right] \\
&= E\left[\cos(tX)\right] + i\,E\left[\sin(tX)\right] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi karakteristik dari –*X* adalah $\overline{\phi_x(t)}$.

$$
\begin{aligned}
E\left[e^{it(-X)}\right] &= E\left[e^{-itX}\right] \\
&= E\left[\cos(-tX) + i\sin(-tX)\right] \\
&= E\left[\cos(tX) - i\sin(tX)\right] \\
&= E\left[\cos(tX)\right] - i\,E\left[\sin(tX)\right] \\
&= \overline{\varphi_x(t)} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan (2) dan (3), bahwa fungsi karakteristik dari –*X* adalah $\overline{\phi_x(t)}$, sekawan dari $\phi_x(t)$.

(Lukacs dan Laha,1964)