II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Matriks untuk Analisis Faktor

Berikut ini akan dijelaskan beberapa konsep dasar matriks yang digunakan dalam analisis faktor.

2.1.1 Matriks Invers

Menurut Negoro & Harahap (1987) matriks invers jika **A** & **B** kedua-duanya matriks bujur sangkar dan **AB** = **BA** = **I**, maka **B** disebut inversnya dari **A**, ditulis: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ dan dibaca: **B** sama dengan inversnya **A**. Sebaliknya **A** juga inversnya **B**, ditulis:
$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$.

2.1.2 Matriks Definit dan Semidefinit Positif

Sebuah matriks simetriks berukuran n x n. **A** dikatakan bersifat definit positif jika untuk sembarang vektor $\mathbf{x} \neq 0$, bentuk kuadratik $\mathbf{x'Ax} > 0$. Sedangkan dikatakan semidefinit jika $\mathbf{x'Ax} \geq 0$. Jika **A** adalah definit positif maka persamaan $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = c$, dengan c adalah konstanta. Jika **A** adalah matriks diagonal yang semua unsur diagonalnya bernilai positif, maka **A** adalah matriks definit positif tapi jika ada paling tidak sebuah unsur bernilai nol (yang lain positif) menjadi matriks semidefinit positif. Matriks diagonal yang unsurnya adalah ragam peubah akan bersifat demikian karena ragam tidak pernah bernilai negatif.

Matriks yang definit positif, akar-akar cirinya semua bernilai positif dan determinan dari matriks definit positif juga bernilai positif karena berupa hasil perkaliannya. Jadi determinannya tidak sama dengan nol, sehingga **A** bersifat non-singular.

Matriks **B** berukuran *m x n*, maka **BB'** dan **B'B** bersifat semidefinit positif. Jika $m < n$ dan r(**B**) = m maka **BB'** definit positif, tapi **B'B** masih semidefinit positif.

2.1.3 Matriks Ortogonal

Menurut Ayres (1984) suatu matriks bujur sangkar **A** disebut ortogonal jika

$\mathbf{A}\,\mathbf{A'} = \mathbf{A'}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$

yaitu jika $\mathbf{A'} = \mathbf{A}^{-1}$

2.1.4 Matriks Simetrik

Menurut Sartono (2003) sebuah matriks **A** berukuran n x n dikatakan simetrik jika **A'**=**A**. Jelasnya, jika a_{ij} adalah unsur ke - (i, j) dari matriks **A**, maka untuk matriks simetrik sebagai berikut:

$a_{ij} = a_{ji}$; untuk semua i dan j.

2.1.5 Matriks Transpose

Menurut Negoro & Harahap (1987) dan Ayres (1984) matriks transpose dari suatu matriks adalah matriks baru yang diperoleh dari matriks lain dengan menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Jika matriks semula dinamakan **A**, maka matriks transposenya **A'**.

Sifat-sifat transpose:

Jika **A'** dan **B'** berturut-turut merupakan transpose dari matriks **A** dan **B**, maka berlaku:

a. Transpose dari jumlah dua matriks adalah jumlah masing-masing transposenya, yaitu

   (**A** + **B**)**'** = **A'** + **B'**

   Bukti:

   Misalkan **A** = (a_{ij}) dan **B** = (b_{ij}) maka:

   (**A** + **B**)' = $(a_{ij} + b_{ij})' = (c_{ij})' = (c_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji})$ = **A'** + **B'** ■

b. (**A'**)' = **A**

   Bukti:

   Misalkan **A** = (a_{ij}) maka (**A'**)**'** = $(a_{ji})' = (a_{ij})$ = **A** ■

c. Jika m suatu bilangan nyata (suatu skalar), maka m(**A**)' = (m**A**)'

   Bukti:

   Misalkan **A** = (a_{ij}) maka m(**A'**) = $(m\, a_{ji})'$ = (m**A**)' ■

d. Transpose dari hasil kali dua matriks adalah hasil kali masing-masing transposenya dalam urutan terbalik, yaitu (**AB**)**'** = **B' A'**

Bukti:

Misalkan **A** = (a_{ij}) dan **B** = (b_{ij}) maka elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari **AB** adalah: a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{in} b_{nj}, yang merupakan juga elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i dari (**AB**)'. Dengan katalain baris ke-j dari **B'** adalah kolom ke-j dari **B** yaitu (b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}) dan kolom ke-i dari **A'** adalah baris ke-i dari **A** yaitu $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$ jadi, elemen pada baris ke-j kolom ke-i dari **B'A'** adalah:

$$\begin{bmatrix} b_{1j} & b_{2j} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \ldots + b_{nj}a_{in}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Jadi benar untuk semua i dan j, sehingga (**AB**)**'** = **A' B'**

2.1.6 Matriks Indentitas

Menurut Anton dan Roses (2004) jika **R** adalah bentuk eselon baris tereduksi dari matriks $\mathbf{A}_{(n \times n)}$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu **R** memiliki satu baris bilangan nol atau **R** merupakan matriks indentitas $\mathbf{I}_n$.

2.1.7 Determinan Matriks

Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2011) deteminan dari matriks **A** berukuran n x n adalah perkalian dari semua akar ciri **A**, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dapat dinotasikan $|\mathbf{A}|$, sehingga

$$|\mathbf{A}| = \lambda_n\, x \ldots x\, \lambda_n$$

Jadi $|\mathbf{A}|$ = 0 jika dan hanya jika paling tidak ada satu akar yang nol, yaitu terjadi jika dan hanya jika **A** singular.

2.1.8 Matriks Elementer

Menurut Anton dan Roses (2004) suatu matriks n x n disebut matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks indentitas $\mathbf{I}_{\mathbf{n}\ (\mathbf{n}\ \mathrm{xn})}$ dengan melakukan opersai baris elementer tunggal.

2.1.9 Rank Matriks

Menurut Anton dan Roses (2004) dimensi ruang baris dan ruang kolom matriks **A** dinamakan rank **A** dan dinyatakan dengan rank(**A**).

2.1.10 *Trace* Matriks

Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2011) *trace* dari matriks **A** berukuran n x n didefinisikan sebagai penjumlahan semua akar cirinya dan dinotasikan tr(**A**), sehingga

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

Bisa ditunjukan bahwa $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, jumlah dari unsur-unsur diagonalnya.

2.1.11 Nilai Eigen (Akar Ciri) dan Vektor Eigen (Vektor Ciri)

Menurut Sartono (2003) misalkan **A** adalah matriks berukuran n x n. Pasangan-pasangan $(\lambda_1, x_1), \ldots, (\lambda_n, x_n)$ dikatakan sebagai pasangan akar ciri dan vektor ciri jika semua (λ_i, x_i) memenuhi persamaan $\mathbf{A}\, x = \lambda\, x$.

2.1.12 Matrik Kovarian

Menurut Basilcvsky, A. (1994) matriks kovarians sampel dari suatu variabel acak p adalah matriks **S** yang unsur (*l*, *h*) dengan kovarian antara kolom *l* dan kolom h dari matriks data pada kolom **Y**, sehingga **S** dapat dituliskan sebagai berikut:

$$s_{lh} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_{il} - \bar{y}_l)(y_{ih} - \bar{y}_h)}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} y_{il} y_{ih} - n\bar{y}_l \bar{y}_h\right] \qquad (2.1)$$

Saat $y_l = y_h$, dari persamaan (2.1) menghasilkan varians dari sampel. Nilai kovarians dapat ditulis sebagai berikut:

$$S_{(y_l+c),(y_h+c)} = S_{lh}$$

$$S_{c\,y_l, ky_k} = cks_{lh} \qquad (2.2)$$

Dengan menambahkan atau mengurangi nilai konstan untuk variabel acak tidak mengubah besarnya kovarians, kecuali mengalikannya dengan konstanta.

Matriks kovarian juga dapat dihitung dalam hal operasi matriks sebagai berikut:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \cdots & \bar{y}_p \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \cdots & \bar{y}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{y}_t & \bar{y}_z & \cdots & \bar{y}_p \end{bmatrix}$$

dengan $\bar{\mathbf{Y}}$ adalah nilai rata-rata sampel dari Y_1, Y_2, ... , Y_p. maka matriks kovarians dapat difinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}(Y - \bar{Y})^T(Y - \bar{Y})]$$

$$= \frac{1}{n-1} X^T X$$

dimana $\mathbf{X} = \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}}$ adalah simpangan nilai matriks rata- rata.

Matriks persamaan (2.1) tersebut kemudian dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}(Y - \bar{Y})^T(Y - \bar{Y})]$$

$$= \frac{1}{n-1}(Y^T Y - Y^T\bar{Y} - \bar{Y}^T Y + \bar{Y}^T \bar{Y})$$

$$= \frac{1}{n-1}(Y^T Y + n\,\bar{Y}^T \bar{Y}) \qquad (2.3)$$

Matriks $\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{Y}}$ simetris mengandung bentuk $\bar{y}_i$, $\bar{y}_h$; untuk $l \neq h$ dan $\bar{y}_l^2$; untuk $l = h$. Persamaan (2.2) adalah multivariat yang setara dengan komputasi rumus untuk varians sampel karena dalam sebagian besar aplikasi tingkat variabel acak tidak seharusnya mempengaruhi tingkat kedekatan atau asosiasi yang terjadi, matriks kovarians lebih banyak digunakan daripada produk dalam atau matriks cosinus terutama ketika variabel acak kontinu. Kovarian juga independen dari ukuran sampel karena pembilang dari persamaan (2.1) dapat dibagi dengan n-1.

2.1.13 Matrik Korelasi

Menurut Basilcvsky, A. (1994) diketahui $|s_{lh}|$ menunjukkan nilai absolut dari sampel kovarians antara variabel Y_l, Y_h. maka dari ketidaksamaan Cauchy-schwartz $|s_{lh}| \leq s_l s_h$, yaitu, $-s_l s_h \leq s_{lh} \leq s_l s_h$, dimana s_l dan s_h adalah simpangan baku. Sehingga diperoleh:

$$-1 \leq \frac{s_{lh}}{s_l s_h} \leq 1 \tag{2.4}$$

Dimana $r_{lh} = \frac{s_{lh}}{s_l s_h}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_{il} - \bar{y}_l)(y_{ih} - \bar{y}_h)}{\left[\sum_{i=1}^{n} (y_{il} - \bar{y}_l)^2\right]^{-1/2} \left[\sum_{i=1}^{n} (y_{ih} - \bar{y}_h)^2\right]^{-1/2}} \tag{2.5}$$

Merupakan nilai koefisien korelasi antara Y_l dan Y_h yang dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$r_{(y_l+c),(y_h+c)} = r_{lh}$$

$$r_{c\,y_l,ky_k} = r_{lh} \tag{2.6}$$

Sehingga koefisien korelasi adalah independen dari penjumlahan dan perkalian dengan konstanta. Tergantung pada ukuran sampel yang dijelaskan pada persamaan (2.5).

Matriks korelasi adalah matriks koefisien korelasi **R** yang elemen tak diagonal terdiri dari bentuk yang diberikan oleh persamaan (2.6) dan elemen diagonal yang identik sama.

Definisi 2.1 Matriks korelasi juga dapat dihitung dengan operasi matriks. Misalkan S_d menjadi matriks diagonal dengan elemen diagonalnya adalah jumlah kuadrat $(Y_1 - \bar{Y}_1)^T(Y_1 - \bar{Y}_1)$, $(Y_2 - \bar{Y}_2)^T(Y_2 - \bar{Y}_2)$, …, $(Y_p - \bar{Y}_p)^T(Y_p - \bar{Y}_p)$ maka R dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = S_d^{-1/2}\,(Y - \bar{Y})^T(Y - \bar{Y})S_d^{-1/2}$$
$$= S_d^{-1/2}\,X^T X\,S_d^{-1/2}$$
$$= Z^T Z \qquad (2.7)$$

dimana $\mathbf{Z} = (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})\mathbf{S}_d^{-1/2}$ adalah matriks (*n x p*) dengan variabel standar, yaitu kolom **Y** disesuaikan ke nol yang berarti satuan varians. Dari persamaan (2.7) koefisien korelasi sampel antara variabel acak juga dapat dilihat sebagai hasil produk dalam antara dua vektor standar untuk nilai rata-rata nol dan satuan unit. Ketika unit umum berukuran matriks kovarians yang umum digunakan saat terjadi perbedaan varians dengan informasi penting untuk proses pendugaan. Pada waktu proses dilakukan tidak mungkin data akan berisi satuan ukuran yang beragam. Sehingga varians tidak lagi sebanding dan tidak menghasilkan informasi yang berguna dan variabel-variabel acak harus distandarisasi untuk mendapatkan varians yang sama. Meskipun standardisasi dapat mengambarkan unsur kepalsuan dalam analisis yang tampaknya tidak akan banyak pilihan sehingga unit menghasilkan ukuran yang berbeda.

2.2 Analisis Faktor

Menurut Khattree, R. dan Naik, D. N. (2000) misalkan **x** adalah vektor acak dengan vektor rata-rata **μ** dan matriks ragam-peragam **Σ**, dan hubungan antar unsur vektor **x** dapat dituliskan dalam model faktor:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Lf} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.8)$$

dimana

μ = vektor konstanta

f = faktor bersama dari vektor acak dengan ukuran *kx1* ($k < p$) dengan i= 1, 2, .., p

L= *loading* faktor

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ = unsur vektor acak yang disebut faktor khusus dengan i = 1, 2, .., p.

Diasumsikan bahwa vektor **f** dan **ε** saling tidak berkorelasi. Jadi model persamaan (2.8) berimplikasi bahwa untuk unsur **x** tertentu, misalkan x_i yang mewakili pengukuran pada peubah tertentu dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari seluruh faktor bersama dan sebuah faktor khusus dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
X_1 - \mu_1 &= \ell_{11}F_1 + \ell_{12}F_2 + \dots + \ell_{1m}F_m + \varepsilon_1 \\
X_2 - \mu_2 &= \ell_{21}F_1 + \ell_{22}F_2 + \dots + \ell_{2m}F_m + \varepsilon_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
X_p - \mu_p &= \ell_{p1}F_1 + \ell_{p2}F_2 + \dots + \ell_{pm}F_m + \varepsilon_p
\end{aligned} \quad (2.9)$$

dimana l_{ij}, unsur ke-(i, j) dari matriks **L**, **L** adalah *loading* faktor untuk faktor bersama f_j terhadap x_i. Jika k = 1 maka model faktor tersebut tereduksi menjadi model Spearman sebagai berikut:

$$x_i = L_i f + \varepsilon_i \;\; ; i = 1, \ldots, p$$

Permasalahan analisis faktor yang muncul adalah bagaimana menentukan faktor-faktor bersama sehingga korelasi di antara unsur vektor **x** terangkum pada faktor-faktor yang diperoleh. Model analisis faktor pada persamaan (2.8) memenuhi asumsi sebagai berikut:

1. $E(\mathbf{f}) = 0$
2. $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$
3. $\mathrm{Cov}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$
4. $\mathrm{Var}\ (\mathbf{f}) = \Delta$ definit positif
5. $\mathrm{Var}\ (\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_p \end{bmatrix}$; dengan $\psi_i > 0$

Dengan asumsi tersebut, maka berdasarkan persamaan (2.8) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$var(\mathbf{x}) = \Sigma = \mathbf{LL'} + \psi$$

Jika **L** dan **f** keduanya tidak diketahui, maka persamaan (2.8) menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\boldsymbol{\Delta}^{1/2}\,\Delta^{-1/2}\mathbf{f} + \varepsilon \\ = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L^{*}f^{*}} + \varepsilon \end{aligned}$$

dimana $\mathbf{L^*} = \mathbf{L}\ \boldsymbol{\Delta}^{1/2}$ dan $\mathbf{f^*} = \Delta^{-1/2}\mathbf{f}$. Dengan bentuk model ini maka matriks ragam-peragam bagi vektor **x** adalah

$$var(\mathbf{x}) = \Sigma = \mathbf{L^*L^{*\prime}} + \boldsymbol{\psi}$$

Secara umum, dapat diasumsikan bahwa $var(\mathbf{f}) = \mathbf{I}_k$, dimana $\mathbf{I}_k$ merupakan matriks identitas, sehingga $var(\mathbf{x})$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$var(\mathbf{x}) = \Sigma = \mathbf{LL'} + \boldsymbol{\psi} \qquad (2.10)$$

Model pada persamaan (2.8) dan asumsi persamaan (2.10) merupakan model faktor baku yang banyak digunakan. Tujuan analisis ini adalah menentukan **L** dan **ψ** telah memenuhi asumsi sehingga persamaan (2.10) terpenuhi. Penentuan ini menjadi masalah utama dalam analisis faktor.

Perhatikan bahwa $cov(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = \mathbf{L}$ atau $cov(x_i, f_j) = l_{ij}$. Hal ini berimplikasi bahwa peragam dari vektor acak **x** dan vektor dari faktor bersama **f** secara lengkap ditentukan oleh matriks *loading factor* **L**. Juga dapat dilihat bahwa $corr(x_i, f_j) = l_{ij}/\sqrt{\sigma_{ii}} = l_{ij}$, jika $var(x_i) = \sigma_{ii} = 1$, yaitu ketika $\boldsymbol{\Sigma}$ berupa matriks korelasi. *Loading factor* adalah matriks koefisien korelasi antara peubah asal dengan faktor bersama.

Misalkan vektor berukuran *px1*, $\boldsymbol{l}_i$ dan $\boldsymbol{l}_j$ adalah baris ke-i dan ke-j dari matriks **L**. Maka untuk $i \neq j$,

$$\sigma_{ij} = cov(x_i, x_j) = \boldsymbol{l}_i'\boldsymbol{l}_j = l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + \ldots + l_{ik}\, l_{jk}$$

dan

$$\sigma_{ii} = var(x_i) = \boldsymbol{l}_i'\boldsymbol{l}_i + \psi_i$$
$$= l^2_{i1} + l^2_{i2} + \ldots + l^2_{ik} + \psi_i$$
$$= h^2_i + \psi i$$

dengan $h^2_i = \boldsymbol{l}_i'\boldsymbol{l}_i$. Jadi ragam dari x_i diuraikan menjadi dua komponen ragam, yaitu h^2_i dan ψ_i, yang masing-masing berpadanan dengan faktor bersama dan faktor khusus. Besaran ψ_i adalah kontribusi faktor khusus ε_i yang disebut ragam khusus, sedangkan h^2_i adalah kontribusi faktor bersama dan disebut komunalitas ragam bersama. l^2_1 adalah kontribusi faktor bersama pertama terhadap ragam bersama, l^2_2 adalah kontribusi faktor bersama kedua terhadap ragam bersama, dll.

Umumnya, penguraian secara tepat matriks korelasi $\boldsymbol{\rho}$ ataupun matriks ragam peragam $\boldsymbol{\Sigma}$ menjadi $\mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}$ tidak selalu mungkin diperoleh. Persamaan $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}$ dalam faktor analisis hanya terpenuhi pada kondisi tertentu berkaitan dengan nilai p dan k untuk menginginkan banyaknya parameter yang tak diketahui pada model faktor lebih sedikit daripada yang di dalam matriks $\boldsymbol{\Sigma}$. Perhatikan bahwa pada bagian kiri persamaan $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{LL'} + \boldsymbol{\psi}$ memiliki $p(p+1)/2$ unsur yang berbeda, sedangkan disebelah kiri $\mathbf{L}$ memiliki pk unsur dan memiliki p unsur, sehingga totalnya $pk+p$ parameter. Jadi untuk model faktor diperlukan bahwa

$$\frac{p(p+1)}{2} - (pk\ x\ p) > 0 \text{ atau } p > 2k$$

Jika $p > 2k$, solusi tepat untuk persamaan $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{LL'} + \boldsymbol{\psi}$, dalam bentuk $\mathbf{L}$ dan $\boldsymbol{\psi}$ memungkinkan pada kasus sederhana. Sebagai contoh $p = 3$ dan $k = 1$

$$x_1 = l_1 f + \varepsilon_1$$

$$x_2 = l_2 f + \varepsilon_2$$

$$x_3 = l_3 f + \varepsilon_3$$

maka

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}' + \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l_1} \\ \boldsymbol{l_2} \\ \boldsymbol{l_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 \\ l_2 l_1 & l_2^2 & l_2 l_3 \\ l_3 l_1 & l_3 l_2 & l_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan tersebut untuk mendapatkan l_i dan ψ_i, i = 1, 2, 3, menghasilkan

$$\ell_1^2 = \frac{\sigma_{13}\sigma_{12}}{\sigma_{23}} \qquad \ell_2^2 = \frac{\sigma_{23}\sigma_{12}}{\sigma_{13}} \qquad \ell_3^2 = \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}} \tag{2.11}$$

dan

$$\psi_1 = \sigma_{11} - \ell_1^2 \qquad \psi_2 = \sigma_{22} - \ell_2^2 \qquad \psi_3 = \sigma_{33} - \ell_3^2 \tag{2.12}$$

Model faktor pada persamaan (2.8) tidak unik karena dua pasang (**L, f**) dan (**L*, f***) yang berbeda menghasilkan struktur matriks ragam peragam yang sama. Misalkan saja $\boldsymbol{\Gamma}$ adalah sembarang matriks ortogonal berukuran $k \times k$. Maka model pada persamaan (2.8) dapat ditulis ulang sebagai:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\,\boldsymbol{\Gamma}\,\boldsymbol{\Gamma}'\,\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}^*\,\mathbf{f}^* + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.13}$$

dengan $\mathbf{L}^* = \mathbf{L\Gamma}$ dan $\mathbf{f}^* = \mathbf{\Gamma}'\mathbf{f}$. Perhatikan bahwa $E(\mathbf{f}^*) = E(\mathbf{\Gamma}'\mathbf{f}) = \mathbf{\Gamma}'E(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$, dan $var(\mathbf{f}^*) = var(\mathbf{\Gamma}'\mathbf{f}) = \mathbf{\Gamma}'\ var(\mathbf{f})\ \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}' = \mathbf{I}_k$. Sehingga sembarang transformasi ortogonal terhadap **f** akan menghasilkan struktur peragam yang sama untuk $\mathbf{\Sigma}$, yaitu

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma} &= \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}\\ &= \mathbf{L\,\Gamma'\,\Gamma\,L}' + \boldsymbol{\psi}\\ &= \mathbf{L}^*\,\mathbf{L}^{*\prime} + \boldsymbol{\psi}\end{aligned}$$

2.3 Metode Pendugaan *Loading Factor*

2.3.1 Metode Komponen Utama

Menurut Rao (1964) metode komponen utama pada analisis faktor adalah metode yang paling sederhana. Misalkan **R** adalah matriks korelasi contoh berukuran *p x p*, karena matriks **R** adalah simetris dan definit positif maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Gamma\,\Lambda\,\Gamma}'$$

Dengan $\mathbf{\Lambda}$ adalah diagonal ($\lambda_1, \ldots, \lambda_p$), dan $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_p > 0$ adalah akar ciri matriks **R**, serta $\mathbf{\Gamma\Gamma}' = \mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}p$, dengan $\mathbf{\Gamma}$ adalah matriks ortogonal *p x p* yang kolom-kolomnya adalah vektor ciri matriks **R** , yaitu $\Gamma_1, \ldots, \Gamma p$ yang berpadanan dengan vektor ciri $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Misalkan *k* adalah banyaknya komponen utama yang dipilih menggunakan kriteria tertentu, misalnya banyaknya komponen utama minimum yang mampu menerangkan persentase keragaman total dengan demikian dapat didefinisikan matriks berukuran *p x k* sebagai $\hat{\mathbf{L}}$:

$$\hat{\mathbf{L}} = \left|\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_1}\,\boldsymbol{\Gamma}_1,\ \ldots,\ \sqrt{\boldsymbol{\lambda}_k}\,\boldsymbol{\Gamma}_k\right| \tag{2.14}$$

maka, R didekati dengan

$$\hat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}'} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda}_i \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\Gamma}'_i \tag{2.15}$$

Dimana $\boldsymbol{\Gamma}_i$ adalah kolom ke-*i* pada matriks $\boldsymbol{\Gamma}$.

Jadi $\hat{\mathrm{L}}$ = (ℓ_{ij}) yang diberikan pada persamaan (2.15) merupakan penduga matriks loading faktor **L**. Matriks diagonal ragam khusus $\boldsymbol{\psi}$ diduga dengan $\boldsymbol{\psi}_i$, yaitu matriks diagonal yang unsurnya diambil dari **R** - $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} 1-\hat{h}_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\hat{h}_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\hat{h}_p^2 \end{bmatrix}$$

dimana $h^2_i = \sum_{i=1}^{k} \ell_{ij}^2$, i = 1, 2, …, *p*

Dengan demikian diperoleh model *k*-faktor dengan **L** diduga oleh $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\boldsymbol{\psi}$ diduga dengan $\hat{\psi}$, sehingga diperoleh pendekatan bagi **R** adalah

$$\mathbf{R} \approx \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}} + \hat{\boldsymbol{\psi}}$$

Sebelum melakukan validasi model untuk menerima $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ sebagai penduga akhir, maka perlu dihitung matriks sisaan terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\mathbf{Res} = \mathbf{R} - (\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\psi}})$$

dan besaran dari unsur-unsurnya diperhatikan menggunakan ukuran statistik tertentu atau secara intuitif.

Matriks sisaan **Res** selalu memiliki unsur diagonal nol. Pada kasus yang ideal, **Res** = **0**, dengan demikian dalam bahasa intuitif jika unsur nondiagonal juga dekat dengan nilai 0 maka penduga $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\psi}}$, dianggap cukup bagus dan dapat diterima. Hal ini memicu munculnya statistik untuk menilai mutu dari pendugaan.

Jika *k* terpilih sehingga $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ yang merupakan keragaman total yang diterangkan oleh *k* buah vektor ciri besar (mendekati *p*) maka $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ akan kecil (mendekati 0). Bisa ditunjukkan bahwa jumlah kuadrat dari unsur-unsur matriks sisaan Res ≤ $\sum_{i=k+1}^{k} \lambda_i$. Sehingga jika $\sum_{i=k+1}^{k} \lambda_i$ kecil, ini juga menunjukkan bahwa matriks sisaan itu kecil atau besaran $\frac{\sum_{i=k+1}^{k} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} = \frac{\sum_{i=k+1}^{k} \lambda_i}{p}$ dapat dijadikan ukuran kebaikan yang sesuai dari model faktor. Semakin kecil nilainya mengindikasikan kebaikan model faktor yang baik. Jika yang digunakan bukan matriks korelasi melainkan matriks ragam peragam maka $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ tidak selalu sama dengan *p*.

Salah satu ukuran untuk menilai kebaikan model yang sesuai adalah menggunakan RMS_*overall* yaitu akar kuadrat tengah dari seluruh unsur non diagonal matriks **Res**, sebagai berikut:

$$\text{RMS\_}\textit{overall} = \sqrt{\frac{1}{p(p-1)} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} res_{ij}^2}$$

Meskipun tidak ada keseragaman aturan untuk menentukan batasan dari RMS_*overall* ini, namun beberapa ilmuan menyatakan bahwa nilai 0.05 dapat digunakan yang artinya jika diperoleh RMS_*overall* yang kurang dari 0.05 dengan banyaknya faktor bersama paling sedikit, itulah yang diambil sebagai model terbaik berdasarkan kriteria tersebut.

Untuk melakukan evaluasi terhadap masing-masing peubah sehingga didapatkan RMS di setiap peubah dengan menggunakan formula sebagai berikut:

$$RMS_i = \sqrt{\frac{1}{(p-1)} \sum_{j \neq i} res_{ij}^2}$$

2.3.2 Metode Kemungkinan Maksimum (*Maximum Likelihood Method*)

Menurut Johnson and Wichern (1998) misalkan $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, …, $\mathbf{X}_n$ adalah sampel acak dari populasi normal, N**p** (**μ, Σ**) dimana $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{LL'}+\boldsymbol{\psi}$ adalah matriks koragam untuk model faktor bersama dari persaman (2.10) dengan fungsi *likelihood*, **L**(**μ, Σ**) adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m}(x_j-\bar{x})(x_j-\bar{x})' + n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'\right]\right.} \quad (2.16)$$

Dugaan kemungkinan maksimum $\hat{\mathbf{L}}$, $\hat{\boldsymbol{\psi}}$, dan $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{x}}$ diperoleh dengan cara memaksimumkan persamaan (2.16) yang didasarkan pada kondisi khusus (*uniqueness*) $\mathbf{\Delta} = \mathbf{L}' \boldsymbol{\psi}^{-1} \mathbf{L}$ sebagai matriks diagonal.

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.10) ke persamaan (2.16), dan memisalkan $\ell = \ln \mathbf{L}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ maka diperoleh:

$$\ell = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ \Sigma^{-1}\left(n\, S_n + n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'\right]$$

$$\ell = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\Sigma| - \frac{n}{2}\,\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}S_n\right) - \frac{n}{2}\,(\bar{x} - \mu)\Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu)' \tag{2.17}$$

dengan mempertimbangkan bahwa $\hat{\mu} = \bar{x}$, menurut Seber (1984) untuk memaksimalkan *log-likelihood*

$$\ell = -\frac{n}{2}\left[\ln|\Sigma| + tr(\Sigma^{-1}S_n)\right] \tag{2.18}$$

ekuivalen dengan meminimumkan

$$h\,(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{L}) = \ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \ln|\mathbf{S_n}| + \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S_n}) - p \tag{2.19}$$

Hingga memenuhi

$$\left(\hat{\psi}^{-1/2}S_n\hat{\psi}^{-1/2}\right)\left(\hat{\psi}^{-1/2}\,\hat{L}\right) = \left(\hat{\psi}^{-1/2}\,\hat{L}\right)(I + \hat{\Delta}) \tag{2.20}$$

Menurut Johnsons dan Wichern (1998) sampai diperoleh kondisi yang konvergen, elemen diagonal $\hat{\Psi}$ akan sama dengan (**S-** $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}$**’**), dimana S_n dan p = tr $(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{S_n^{-1}})$ adalah bernilai konstan.

2.3.3 Metode Faktor Utama

Menurut Khattree, R. dan Naik, D. N. (2000) metode faktor utama didasarkan pada penggunaan metode komponen utama terhadap matriks korelasi semu (matriks ragam-peragam semu), yaitu diperoleh dengan mengganti unsur diagonal dengan komunalitas.

Misalkan struktur faktor yang diberikan pada persamaan (2.3) **R** = **LL’** + **ψ**, berlaku untuk suatu nilai *k*. Jika *k* adalah banyaknya faktor, maka matriks korelasi semu

$\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi} = \mathbf{LL'}$ merupakan matriks simetrik semidefinit positif dengan pangkat k yang tujuannya adalah menduga **L.** Dengan penguraian spektral terhadap $\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi}$ maka diperoleh hasil:

$$\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Gamma\Lambda\Gamma'}$$

dimana $\boldsymbol{\Lambda}$ = diagonal($\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0$), dan $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k > 0$ adalah akar ciri dari matriks korelasi semu dan $\boldsymbol{\Gamma}$ adalah matriks vektor ciri padanannya. Dengan demikian matriks **L** dapat diperoleh melalui:

$$\hat{\mathbf{L}} = \left|\sqrt{\lambda_1}\,\boldsymbol{\Gamma}_1, \ \ldots, \ \sqrt{\lambda_k}\boldsymbol{\Gamma}_k\right|$$

dengan $\boldsymbol{\Gamma}_i$ adalah kolom ke-*i* dari matriks . Dalam prakteknya untuk matriks **R** yang diketahui dan $\boldsymbol{\psi} = \hat{\boldsymbol{\psi}}$, $\mathbf{R} - \hat{\boldsymbol{\psi}}$ mungkin saja berpangkat penuh. Jadi dengan menggunakan $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ sebagai penduga $\boldsymbol{\Gamma}$**,** dan $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ sebagai penduga $\boldsymbol{\Lambda}$, melalui penguraian

$$\mathbf{R}\alpha = \mathbf{R} - \hat{\boldsymbol{\psi}} = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}\,\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\,\hat{\boldsymbol{\Gamma}}' \qquad (2.21)$$

Sehingga **L** dapat diduga sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{L}} = \left|\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_1, \ \ldots, \ \sqrt{\hat{\lambda}_k}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k\right|$$

dimana $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_i$ kolom ke-*i* dari matriks $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$. Sehingga **L** diduga dengan mendekati $\hat{\mathbf{L}}$ yang memenuhi struktur faktor sebagai berikut:

$$\mathbf{R}_\alpha = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\psi}}, \text{ untuk } \boldsymbol{\psi} = \hat{\boldsymbol{\psi}} \text{ yang telah ditentukan}$$

Misalkan matriks korelasi **R** dan matriks dugaan ragam khusus $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ telah ditentukan, maka menggunakan $\hat{h}_i^2 = 1 - \hat{\boldsymbol{\psi}}_i$, $i = 1, \ldots, p$ kita dapat memperoleh penguraian sebagai berikut:

$$\mathbf{R}\alpha = \mathbf{R} - \hat{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1^2 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{12} & \hat{h}_2^2 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & \hat{h}_p^2 \end{bmatrix} \approx \hat{\boldsymbol{\Gamma}}\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}'$$

Andaikan *k'* adalah banyaknya unsur diagonal $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ yang tidak sama dengan 0, yaitu λ_1, …, λ_k, dan $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_1$, ..., $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k$ adalah vektor ciri **R –** $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ yang berpadanan dengannya. Meskipun **R -ψ** matriks yang definit positif dengan pangkat *k*, namun **R**α = **R -** $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ dapat memiliki akar ciri yang negatif. Misalkan diambil *k'* sebagai penduga *k*. Pada metode faktor utama, $\hat{k}$ sebagai penduga *k* dipilih sehingga memenuhi $\hat{k}$ < *k'* < *k*, dan $\sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i$ dekat dengan penduga total komunalitas $\sum_{i=1}^{k} h_i^2 = tr(\mathbf{R} - \hat{\boldsymbol{\psi}})$. Dengan dasar ini matriks **L** diduga dengan

$$\hat{\mathbf{L}} = \left[\,\left|\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_1\right| \;\ldots \left|\sqrt{\hat{\lambda}_k}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k\right|\,\right]$$

Pendugaan **L** yang dinyatakan tersebut tergantung pada $\hat{\psi}$ yang ditentukan atau pada komunalitas $\hat{h}_i^2$. Artinya pada saat menggunakan metode ini, harus menentukan matriks $\hat{\psi}$ atau menentukan komunalitasnya.

2.4 Pendugaan Parameter

Menurut Larsen dan Marx (2012) sebarang fungsi dari sampel acak yang digunakan untuk menduga suatu paramter disebut dengn statistik atau penduga. Jika θ merupakan parameter yang dapat diduga, maka penduga dari θ dinotasikan $\hat{\theta}$.

2.4.1 Tak bias

Sifat penduga yang baik salah satunya adalah sifat tak bias. Suatu penduga dikatakan takbias apabila asumsi yang telah ditentukan terpenuhi, adapun penjelasannya sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Tak bias)

Misalkan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ merupakan sampel acak dari fungsi kepekatan peluang kontinu $f_Y(y;\theta)$ dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui.

Menurut Larsen dan Marx (2012) penduga $\hat{\theta} = [h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan takbias bagi θ, jika E($\hat{\theta}$)= θ (semua θ). (Untuk konsep dan terminologi yang sama berlaku, jika terdapat data sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang diambil dari fungsi kepekatan peluang diskret $p_x(k;\ \theta)$).

Menurut Larsen dan Marx (2012) suatu penduga $\hat{\theta} = [h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan penduga tak bias asimtotik bagi θ, jika $\lim_{n\to\infty}$ E($\hat{\theta}_n$) = θ.

2.4.2 Ragam Minimum

Menurut Hogg and Craig (1995) selain sifat ketakbiasan, penduga parameter dikatakan baik apabila memenuhi sifat penduga ragam minimum. Adapun definisi ragam minimum suatu penduga sebagai berikut:

Definisi 2.3 (Ragam Minimum)

Bila U(X) merupakan penduga bagi $g(\theta)$, maka $U_1(X)$ dikatakan sebagai penduga beragam terkecil, jika

$$\sigma^2_{u1(x)} \leq \sigma^2_{U(X)}$$

Dimana U(X) merupakan sembarang penduga bagi $g(\theta)$.

Untuk mengetahui sifat varian minimum dari suatu penduga parameter digunakan juga *Cramer-Rao Inequality*.

2.4.2.1 *Cramer-Rao Inequality*

Menurut Hogg and Craig (1995) suatu penduga parameter dikatakan memiliki sifat ragam minimum, apabila memenuhi batas bawah Cramer –Rao. Adapun penjelasan mengenai definisi dan teorema yang mendukung sebagai berikut:

Teorema 2.1 (Cramer-Rao Inequality)

Diberikan $f_Y(y;\theta)$ fungsi kepekatan peluang dengan orde pertama kontinu dan orde kedua turunan. Misalkan himpunan dari nilai y, dimana $f_Y(y;\theta) \neq 0$, dan tidak terikat (bebas) terhadap θ. Diberikan $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sampel acak dari $f_Y(y;\theta)$ dan $\hat{\theta}_n$ = [h(Y_1, Y_2, ..., Y_n)] penduga yang takbias bagi θ.

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left\{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f_y(y;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\}^{-1} = \left\{-nE\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f_y(y;\theta)}{\partial\theta^2}\right)\right]\right\}^{-1}$$

Definisi 2.4

Menurut Hogg and Craig (1995) misalkan Y penduga takbias bagi parameter θ dalam kasus pendugaan baik. Statistik Y dikatakan penduga efisien bagi θ jika dan hanya jika varian dari Y mencapai batas bawah *Rao-Cramer*.

2.4.2.2 Informasi *Fisher*

Menurut Hogg and Craig (1995) misalkan X variabel acak dengan fungsi kepekatan $f(x;\theta), \theta \in \Omega$. Informasi Fisher dinotasikan dengan I(θ), dimana

$$I(\theta) = \; n\, E\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(y;\theta\,)}{\partial\theta}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln f_Y(y;\theta\,)}{\partial\theta}\right]^2 f(x;\theta)dx$$

atau $I(\theta)$ dapat dihitung juga dengan cara berikut:

$$I(\theta) = \; -n\, E\left[\frac{\partial^2 \ln f_Y(y;\theta\,)}{\partial\theta^2}\right] = \; \int_{-\infty}^{\infty} - \left[\frac{\partial^2 \ln f_Y(y;\theta\,)}{\partial\theta^2}\right] f(x;\theta)dx$$

Definisi 2.5 (Informasi Fisher)

Menurut Hogg and Craig (1995) misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang $f(x;\; \theta)$. Maka fungsi kemungkinan fungsi kepekatan peluang bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \dots f(x_n;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \end{aligned}$$

Selanjutnya, fungsi kemungkinan diberi fungsi log natural, sehingga

$$\ln L(\theta) \; = \ln f(x_1;\theta) + \ln f(x_2;\theta) + \cdots + \ln f(x_n;\theta)$$

dan

$$\frac{\partial\, ln\, L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial\theta} + \cdots + \frac{\partial \ln f(x_n;\theta)}{\partial\theta}$$

Maka, dapat didefinisikan informasi fisher dalam sampel acak sebagai berikut:

$$I_n(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f_y(y;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

Definisi 2.6 (Matriks Informasi Fisher)

Misalkan sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta_1,\theta_2), (\theta_1,\theta_2) \epsilon\, \Omega$ dalam kondisi yang ada. Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan bahwa ruang dari X dimana $f(x;\theta_1,\theta_2) > 0$ yang tidak meliputi θ_1 dan θ_2 dimana dapat diturunkan di bawah integralnya. Sehingga matriks informasi fisher sebagai berikut:

$$I_n = n\begin{bmatrix} E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\right]^2\right\} & E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\frac{\partial \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right]\right\} \\ E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\frac{\partial \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right]\right\} & E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right]^2\right\} \end{bmatrix}$$

atau

$$I_n = -n\begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2^2}\right] \end{bmatrix}$$

Selain sifat takbias dan ragam minimum, sifat penduga yang baik lainnya adalah kekonsistenan, maka sub-bab selanjutnya akan dijelaskan mengenai sifat kekonsistenan suatu penduga.

2.4.3 Kekonsistenan

Menurut Larsen dan Marx (2012) sifat penduga yang baik selain ketakbiasan dan ragam minimum adalah sifat kekonsistenan. Suatu penduga dikatakan konsisten apabila asumsi yang telah ditentukan terpenuhi.

Definisi 2.7 (Konsisten)

Suatu penduga $\hat{\theta}_n$=$[h(W_1, W_2, \dots, W_n)]$ dikatakan konsisten dari θ, jika $\hat{\theta}_n$ = $[h(W_1, W_2, \dots, W_n)]$ konvergen peluang ke θ, untuk semua $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Berkaitan dengan kekonsistenan suatu penduga, selain definisi terdapat teorema yang mendukung , yaitu sebagai berikut:

Teorema 2.2 (*Chebyshev's Inequality*)

Misalkan W variabel acak dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. Untuk □$\varepsilon > 0$,

$$P(|W - \psi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(|W - \psi| < k\sigma_w) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Teorema 2.3

Menurut Casella and Berger (2002) jika $W_n = W_n (X_1, X_2, ..., X_n)$ merupakan rangkaian dari penduga suatu parameter θ, maka berlaku:

1. $lim_{n \to \infty} Var_{\theta} W_n = 0$
2. $lim_{n \to \infty} Bias W_n = 0$

Untuk $\forall\theta \in \Theta$, $W_n = 0$ merupakan rangkaian penduga konsisten dari suatu parameter θ.