II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Ragam Klasifikasi Satu Arah

Untuk menguji kesamaan dari beberapa nilai tengah secara sekaligus diperlukan sebuah teknik yang disebut analisis ragam. Analisis ragam adalah suatu metode untuk menguraikan keragaman total data menjadi komponen-komponen yang mengukur berbagai komponen keragaman. Analisis ragam klasifikasi satu arah adalah analisis ragam dengan satu kriteria untuk pengklasifikasian data (Montgomery, 1991).

Model nilai tengah,

$$Y_i = \mu_i + \epsilon_i$$

$$\mu_i = \mu + \tau_i$$

sehingga didapat model pengaruh,

$$y_i = \mu + \tau_i + \varepsilon_i$$

dimana,

y_i = nilai pengamatan pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j

i = 1, 2, ... , k; j = 1, 2, ... , n

μ = rata-rata keseluruhan

τ_i = pengaruh perlakuan ke-i

ε_i = pengaruh galat percobaan pada perlakuan ke-i ulangan ke-j dengan asumsi galat menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan ragam σ

μ_i = rata-rata percobaan faktor ke-i

(Moser, 1994).

Asumsi-asumsi yang mendasari Anara adalah:

1) Pengaruh perlakuan dan pengaruh lingkungan bersifat aditif

   Yang dimaksud dengan bersifat aditif artinya dapat dijumlahkan sesuai dengan model. Adanya ketidakaditifan dalam model akan mengakibatkan keheterogenan ragam galat. Model aditif linier adalah sebuah model yang umumnya digunakan untuk menjelaskan komponen sebuah pengamatan yang tersusun atas nilai tengah dan galat. Komponen nilai tengah terdiri dari satu atau lebih parameter (μ). Model umum adalah sebagai berikut:

$$y_i = \mu + \varepsilon_i$$

   Bila asumsi tidak terpenuhi maka perlu dilakukan tranformasi data. Apabila tidak dilakukan transformasi data, ragam galat gabungan yang diperoleh sedikit tidak efisien untuk selang kepercayaan pengaruh perlakuan dan dapat memberikan tingkat nyata yang palsu untuk perbandingan nilai tengah perlakuan tertentu.

2) Galat percobaan memiliki ragam yang homogen

   Dalam rancangan percobaan, komponen galat yang berasal dari perlakuan harus menduga ragam populasi yang sama. Keheterogenan ragam galat dapat mengakibatkan respon yang tidak stabil dari beberapa perlakuan tertentu. Bila nilai tengah satu atau dua perlakuan lebih tinggi dari yang lainnya dan keragamannya juga lebih tinggi dari yang lainnya, akan mengakibatkan keragaman galat yang tidak homogen. Untuk menguji homogenitas ragam digunakan uji *Bartlett's*.

Prosedur pada uji *Bartlett's* diperoleh dengan menggunakan pendekatan sebaran khi-kuadrat dengan (k-1) derajat bebas.

Untuk menguji hipotesis:

$H_0: \sigma_1^2 = \cdots = \sigma_k^2$

H_1: paling sedikit satu ragam yang tidak sama

Uji *Bartlett's* diperoleh dengan memisalkan ${s_i}^2$ sebagai penduga bagi σ^2 yang diperoleh dari m pengulangan dengan $n_t - 1$ derajat bebas.

$$B = \frac{[\sum_{i=1}^{v}(r_i - 1)] ln\ (s^2) - \sum_{i=1}^{v}(r_i - 1)\ ln\ ({s_i}^2)}{C}$$

dimana,

$${s_i}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{r_i} {e_{it}}^2}{r_i - 1}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{r_i}(y_{it} - \hat{\mu} - \hat{\iota}_i)^2}{r_i - 1}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{r_i}(y_{it} - \bar{y}_i)^2}{r_i - 1}$$

$$= \frac{1}{r_i - 1}\sum_{t=1}^{r_i}(y_{it} - \bar{y}_i)^2$$

s_i^2 = ragam dari tiap perlakuan

r_i = banyaknya ulangan tiap perlakuan

y_{ij} = nilai sampel sari perlakuan tiap ulangan

$\bar{y}_i$ = rata-rata perlakuan tiap ulangan

i = 0, 1, 2, ….n

Maka diperoleh,

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{v}(r_i - 1)s_i^2}{\sum_{i=1}^{v}(r_i - 1)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{v}(r_i - 1)s_i^2}{n - v}$$

dimana,

S^2= jumlah ragam tiap perlakuan

n = banyaknya satuan percobaan

v = banyaknya perlakuan

Dengan nilai C sebagai berikut:

$$C = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{v}(r_i - 1)^{-1} - (\sum_{i=1}^{v}(r_i - 1))}{3(v - 1)}$$

dengan,

r_i = banyaknya ulangan tiap perlakuan

v = banyaknya perlakuan.

Hal tersebut dapat ditunjukkan bahwa $B{\sim}\chi^2$dengan derajad bebas v-1, jika ragam dari μ kelompok adalah sama dan normal (Steel dan Torrie, 1995).

3) Galat percobaan yang saling bebas

Asumsi mengenai faktor ε_i untuk Anara adalah $\varepsilon_i \sim N(0, {\sigma_\varepsilon}^2)$. Peluang bahwa galat dari salah satu pengamatan yang mempunyai nilai tertentu haruslah tidak bergantung dari nilai-nilai galat untuk pengamatan yang lain. Atau dapat dikatakan bahwa tidak ada korelasi antar galat. Jika galat percobaan tidak saling bebas akan mengakibatkan uji nyata yang dilakukan akan mengecoh. Salah satu cara untuk mencapai sifat saling bebas adalah dengan melakukan pengacakan terhadap pengamatan.

4) Galat percobaan menyebar normal

Asumsi ini berlaku terutama untuk pengujian hipotesis, dan tidak diperlukan pada pendugaan komponen ragam. Jika galat percobaan ternyata menjulur ke kanan atau ke kiri, komponen galat dari perlakuan cenderung merupakan fungsi nilai tengah perlakuan. Ini akan mengakibatkan ragam tidak homogen. Jika hubungan fungsional diketahui, maka transformasi dapat ditentukan sehingga akan membuat galat tersebut menyebar mendekati sebaran normal. Dengan demikian analisis ragam dapat dilakukan pada data transformasi (Mattjik dan Sumertajaya, 2000).

2.2 Pengujian Hipotesis Analisis Ragam Klasifikasi Satu Arah

Anara dengan klasifikasi satu arah tanpa interaksi adalah analisis yang klasifikasi pengamatannya didasarkan pada satu kriteria.

Hipotesisnya:

$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_5$

H_1: sekurang-kurangnya satu perlakuan tidak sama dengan lainnya.

Tabel 1. Analisis Ragam Klasifikasi Satu Arah.

Sumber Keragaman	**Jumlah Kuadrat**	**Derajat Bebas**	**Kuadrat Tengah**	**F hitung**
Perlakuan	JKP	k – 1	KTP	$\frac{K}{K}$
Galat	JKG	k (n-1)	KTG	
Total	JKT	nk – 1		

Faktor koreksi (C) adalah jumlah semua pengamatan dikuadratkan dan dibagi dengan jumlah pengamatan.

$$C = \frac{Y..^2}{n} = \frac{\left(\sum_{i,j} Y_i\right)^2}{n}$$

Jumlah kuadrat total (JKT) dapat diperoleh dari rumus:

$$JI \quad = \sum_{i,j} Y_i^2 - C$$

Jumlah kuadrat yang berasal dari peubah klasifikasi, yaitu perlakuan disebut jumlah kuadrat perlakuan (JKP) yang diperoleh dengan rumus:

$$JI \quad = \frac{Y_{1.}^2 + Y_{2.}^2 + \cdots + Y_{k.}^2}{n} - C$$

Jumlah kuadrat antar individu yang diperlakukan sama juga disebut jumlah kuadrat galat (JKG) yang diperoleh melalui pengurangan jumlah kuadrat perlakuan dari jumlah kuadrat total, seperti dalam persamaan berikut:

$$JI \quad = JI \quad - JI$$

JKG juga dapat diperoleh melalui penggabungan jumlah kuadrat dalam perlakuan, seperti yang ditunjukkan dalam persamaan berikut:

$$JI \quad = \sum_{i} \left(\sum_{j} Y_i^2 - \frac{Y_{i.}^2}{k} \right)$$

Kuadrat tengah perlakuan (KTP) dan kuadrat tengah galat (KTG) diperoleh dari membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebasnya, seperti yang ditunjukkan dalam persamaan berikut:

$$K \quad = \frac{JI}{n-1}$$

$$K \quad = JI \quad /k(n-1)$$

Nilai F_t diperoleh dari membagi kuadrat tengah perlakuan dengan kuadrat tengah galat, seperti dalam persamaan berikut:

$$F_t = K \quad /K$$

(Steel dan Torrie, 1995).

2.3 Analisis Rata-rata (ANOM)

Analisis rata-rata (ANOM) adalah prosedur grafis yang digunakan untuk mengukur perbedaan antara kelompok perlakuan dalam berbagai desain eksperimental dan situasi penelitian observasional.

ANOM didasarkan pada dua asumsi:

1. Galat mendekati distribusi normal
2. Untuk semua perlakuan memiliki ragam yang homogen.

Dapat dinotasikan sebagai:

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

dengan,

$$Y_i = \mu_i + \epsilon_i$$

dimana,

μ_i= nilai tengah dari setiap perlakuan

ϵ_i = galat terkait dengan Y_i ,

dan kedua asumsi tersebut menyiratkan $\epsilon_i \sim N(0, {\sigma_\varepsilon}^2)$. ϵ_i adalah variabel acak, kita dapat menghitung kesalahan spesifik yang terkait dengan pengamatan y_i . μ_i dapat diduga dengan rata-rata sampel.

$$\widehat{\mu_i} = \bar{y}_{i.}$$

sehingga,

$$\hat{\epsilon}_i = y_i - \bar{y}_{i.}$$

$\hat{\epsilon}_i$ disebut residual. Residual tidak lebih dari perubahan pengamatan asli, sehingga setiap himpunan nilai perlakuan berpusat pada nol. Untuk menguji asumsi kenormalan dari residual data dan kehomogenan ragam digunakan *Normal Probability Plot*. Jika data terletak pada garis lurus maka kedua asumsi tersebut terpenuhi.

Hipotesis untuk ANOM sama dengan metode konvensional yaitu:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$

dan hipotesis alternatifnya adalah terdapat paling sedikit satu μ_i yang berbeda. Menggunakan ANOM untuk menguji hipotesis ini tidak hanya menjawab pertanyaan apakah terdapat perbedaan tetapi melihat dimana letak perbedaan tersebut.

ANOM didasarkan pada perhitungan *upper decision lines* (UDL) dan *lower decision lines* (LDL) untuk k perlakuan adalah sebagai berikut:

$$U \quad = \bar{y}.. + h(\alpha; k, N-k)\sqrt{M} \quad \sqrt{\frac{k-1}{N}}$$

$$L \quad = \bar{y}.. - h(\alpha; k, N-k)\sqrt{M} \quad \sqrt{\frac{k-1}{N}}$$

dimana,

Mean square error (M) dari Anom adalah :

$$\hat{\sigma}^2 = M \quad = \frac{s_1^2 + \cdots + s_l^2}{k}$$

yang hanya memiliki satu faktor dan derajat bebas (db) N – k.

Rata-rata keseluruhan : $\bar{y}_{..} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \bar{y}_{i.}$

Rata-rata tiap perlakuan : $\bar{y}_{i.} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_i \qquad , i = 1,2, \ldots, k \qquad j = 1, 2, \ldots, n$

Ragam dari tiap perlakuan: $s_i{}^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}_{i.}\right)^2$

Daerah kritis $h(\alpha; k, v)$ tergantung pada :

α = tingkat signifikan yang diinginkan

k = jumlah perlakuan yang dibandingkan

v = derajat bebas untuk M

Nilai kritis untuk jumlah perlakuan rata-rata (k) dan derajat bebas $v = N - k$ untuk α = 0,01; α = 0,1 dan α = 0,05 dapat dilihat pada tabel Nelson (Nelson, Wludyka, dan Copeland, 2005).

ANOM juga dapat diartikan sebagai prosedur grafis untuk membandingkan kelompok nilai rata-rata, laju atau proporsi untuk melihat apakah ada nilai yang secara signifikan berbeda secara keseluruhan.

Ketika melakukan ANOM, pertama-tama menentukan batas keputusan atas dan bawah. Jika semua sampel rata-rata berada dalam batas-batas itu, dapat dikatakan bahwa dengan 100 (1 - α) persen keyakinan tidak ada dasar untuk menolak hipotesis nol, yaitu tidak ada perbedaan yang signifikan di antara sampel. Jika setidaknya satu rata-rata berada di luar batas, maka hipotesis nol ditolak. Batas-batas keputusan atas dan bawah tergantung pada beberapa faktor, yaitu : rata-rata sampel, rata-rata secara keseluruhan rata-rata sampel, standar deviasi, tingkat signifikansi, jumlah sampel, dan ukuran sampel untuk menentukan derajat kebebasan (Oyeyemi dan Adeleke, 2004).

2.4 Prosedur *Tukey w*

Prosedur Tukey diterapkan untuk membandingkan pasangan nilai tengah. Prosedur ini memerlukan satu nilai tunggal untuk menentukan nyata atau tidaknya semua beda pasangan nilai tengah. Prosedur ini menghitung nilai kritik dan menerapkannya pada beda antara semua pasangan nilai tengah.

Nilai kritik :

$$w = q_{\alpha}(p, f_e)s_{\bar{Y}}$$

dimana $s_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{s^2}{r}}$, r adalah banyaknya ulangan.

q_{α} di dapat dari Tabel, p adalah banyaknya perlakuan, dan f_e adalah derajat bebas galat. Laju kesalahan $\alpha = 0{,}05$ berlaku untuk famili semua perbandingan pasangan nilai tengah. Jadi, dalam percobaan yang diulang-ulang dengan semua nilai tengah populasi sama. 5 persen dari famili atau kumpulan beda itu akan mempunyai satu atau lebih pernyataan kesimpulan yang salah dan dalam 95 persen kumpulan itu tidak ada yang dinyatakan berbeda (Steel dan Torrie, 1995).

2.5 Sekuensial Analisis Rata-rata (SANOM)

Prosedur ini merupakan analisis lanjutan dari ANOM untuk membandingkan pasangan nilai tengah. Prosedur SANOM menghasilkan kelompok rata-rata homogen yang *non-overlapping*. Dengan menggunakan LDL dan UDL pada grafik ANOM, dibangun beberapa tahap. Pada tahap pertama, diasumsikan bahwa rata-rata yang jatuh antara LDL dan UDL membentuk kelompok pertama. Sedangkan rata-rata yang jatuh di atas UDL membentuk kelompok kedua dan rata-rata yang jatuh di bawah LDL sebagai kelompok ketiga. Prosedur ANOM kemudian diulang pada kelompok kedua dan ketiga. Adapun tahapan dalam melakukan prosedur SANOM adalah sebagai berikut:

1. Tahap pertama dilakukan prosedur ANOM untuk menentukan nilai LDL dan UDL.
2. Pada tahap pertama didapatkan grafik $\bar{y}_{i.}, i = 1,2, \ldots, k$ terhadap garis keputusan.
    a. Jika semua rata-rata jatuh di antara LDL dan UDL maka dapat disimpulkan bahwa secara signifikan tidak ada perbedaan di antara rata-rata. Dalam hal ini analisis dihentikan.
    b. Jika terdapat satu atau lebih rata-rata berada di luar garis keputusan (di atas UDL atau di bawah LDL) maka dapat disimpulkan bahwa secara signifikan terdapat perbedaan antara rata-rata. Dengan kata lain rata-rata yang jatuh antara LDL dan UDL membentuk satu kelompok

homogen dan yang di luar garis keputusan tidak termasuk dalam kelompok tersebut.

3. Perhatikan rata-rata k_1 perlakuan $(2 \leq k_1 < k)$ yang jatuh di atas UDL dan akan selidiki apakah rata-rata tersebut membentuk kelompok homogen atau tidak. Selanjutnya menghitung garis keputusan sebagai:

   $$U_{2} = \bar{y}.. + h(\alpha; k_1, N - k_1)\sqrt{M} \sqrt{\frac{k_1 - 1}{N}}$$

   $$L_{2} = \bar{y}.. - h(\alpha; k_1, N - k_1)\sqrt{M} \sqrt{\frac{k_1 - 1}{N}}$$

   $\bar{y}..$ dan M_e dihitung dari rata-rata k_1 dan $v_1 = N - k_1$. Jika rata-rata jatuh antara U_2 dan L_2 maka dapat disimpulkan bahwa k_1 membentuk kelompok homogen II. Jika $k_1 = 1$, maka tahap 3 tidak perlu dilakukan dan diasumsikan bahwa rata-rata ini milik kelompok homogen II.

4. Perhatikan rata-rata k_2 perlakuan $(2 \leq k_2 < k)$ yang jatuh di atas UDL dan akan selidiki apakah rata-rata tersebut membentuk kelompok homogen atau tidak. Selanjutnya menghitung garis keputusan sebagai:

   $$U_{3} = \bar{y}.. + h(\alpha; k_2, N - k_2)\sqrt{M} \sqrt{\frac{k_2 - 1}{N}}$$

   $$L_{3} = \bar{y}.. - h(\alpha; k_2, N - k_2)\sqrt{M} \sqrt{\frac{k_2 - 1}{N}}$$

   $\bar{y}..$ dan M dihitung dari rata-rata k_2 dan $v_2 = N - k_2$. Jika rata-rata jatuh antara U_3 dan L_3 maka dapat disimpulkan bahwa k_2 membentuk kelompok homogen III. Jika $k_2 = 1$, maka tahap 4 tidak perlu dilakukan dan diasumsikan bahwa rata-rata ini milik kelompok homogen III.

5. Jika beberapa rata-rata k_1 (minimal 2) pada langkah 3 dan beberapa rata-rata k_2 (minimal 2) pada langkah 4 masih berada di luar garis keputusan masing-masing maka analisis terus dilakukan sampai rata-rata tersebut membentuk sebuah kelompok yang homogen (Oyeyemi dan Adeleke, 2004).