I. LANDASAN TEORI

Seperti yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya, teori graf merupakan salah satu ilmu matematika yang mempresentasikan suatu objek berupa *vertex* (titik) dan *edge* (garis), *edge* merupakan objek yang menghubungkan kedua *vertex*. Ada beberapa istilah, definisi dan contoh – contoh yang berkaitan dengan penelitian ini dan akan dipaparkan sebagai berikut.

2.1. Teori Graf

Teori graf berawal dari seorang ilmuan dari Inggris yaitu Leonhard Euler yang meneliti tentang suatu perjalanan seseorang untuk dapat melewati 7 jembatan yang ada di Kota Konigsberg tepat satu kali. Dengan teori graf, Euler dapat membuktikan bahwa seseorang tidak mungkin melewati tujuh jembatan itu masing – masing satu kali dan kembali ke tempat asal keberangkatannya. Pada permasalahan ini, 7 jembatan yang ada di Kota Konigsberg diwakili oleh *vertex* (titik) pada suatu graf dan kota yang dihubungkan oleh jembatan itu diwakili sebagai *edge* (lintasan) pada graf.

Definisi mengenai graf, selengkapnya akan dipaparkan pada Definisi 2.1. berikut.

Definisi 2.1. Graf (*Vertex* dan *Edge*) (Deo, 1989)

Graf $G = (V,E)$ terdiri dari $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut *vertex* (titik) yang tidak kosong, dan objek $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang unsur – unsurnya disebut *edge* (garis) yang boleh kosong, sehingga setiap *edge* e_{ij} diidentifikasi dengan pasangan (v_i, v_j) dari *vertex*. *Vertex* v_i, v_j berhubungan dengan *edge* e_{ij} disebut *vertex* akhir dari e_{ij}. Representasi paling umum dari

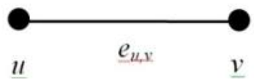
graf adalah dengan cara diagram, dimana *vertex* direpresentasikan sebagai titik dan setiap *edge* sebagai garis yang menghubungkan *vertex*.

Gambar 1. Graf dengan lima *vertex* dan tujuh *edge*

Gambar 1 merupakan salah satu contoh graf yang terdiri dari 5 *vertex* yaitu v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan tujuh *edge* yaitu e_1, e_2, e_3, e_4. e_5, e_6, e_7. *Vertex* v_1 merupakan *vertex* yang *adjacent* terhadap *vertex* v_2 dan *edge* e_3 dikatakan *incidence* pada *vertex* v_1 dan v_2. Definisi *adjacent* dan *incidence* adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2. *Adjacent* dan *Incidence* (Lipschutz and Lipson, 2002)

Jika $e = \{u,v\}$ adalah suatu *edge* (garis) yang menghubungkan *vertex* (titik) u dan v pada graf G, maka *vertex* u dikatakan *adjacent* terhadap *vertex* v dan garis $e_{u,v}$ dikatakan *incidence* pada u dan v. Berikut adalah contoh dari *adjacent* dan *incidence*.



Gambar 2. Graf dengan garis e_{uv} *incidence* pada *vertex* u dan v, serta *vertex* u dan v *adjacent*.

Selain definisi dari *adjacent* dan *incidence* ini, selanjutnya akan dipaparkan definisi mengenai derajat dari suatu graf.

Definisi 2.3. Derajat (*Degree*) (Lipschutz and Lipson, 2002)

Derajat suatu *vertex* pada graf G adalah jumlah *edge* yang terhubung (*incidence*) pada v. Dengan kata lain, jumlah *edge* yang memuat v sebagai titik ujung. *Vertex* yang memuat *loop* memiliki derajat 2 karena kedua titik ujung garis berada disatu titik. Derajat suatu *vertex* pada graf ditulis deg (v). Berikut adalah contoh derajat dari suatu graf. Contoh *degree* dari suatu graf diperlihatkan pada Gambar 3.

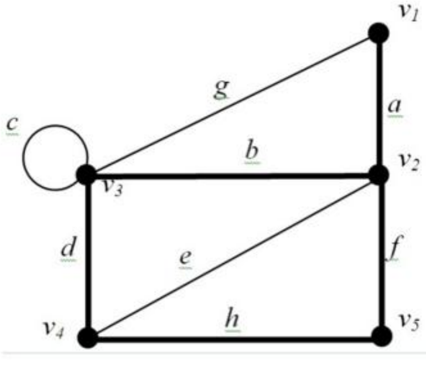
Gambar 3. Graf dengan deg (v_1) = 2, deg (v_2) = 4, deg (v_3) = 3, deg (v_4) = 3

Gambar 3 adalah gambar suatu graf dengan *vertex* v_1 berderajat 2, v_2 berderajat 4 (graf dengan edge *looping* ditentukan memiliki derajat 2), dan *vertex* v_3 dan v_4 berderajat 3.

Kemudian, berikut diberikan definisi dari *walk* yang digunakan untuk mempermudah dalam memahami sirkuit *Hamiltonian* pada graf.

Definisi 2.4. *Walk* (Deo, 1989)

Walk adalah barisan berhingga dari *vertex* dan *edge*, dimulai dan diakhiri dengan *vertex*, sedemikian sehingga setiap *edge* yang menempel dengan *vertex* sebelum dan sesudahnya. Tidak ada *edge* yang muncul lebih dari sekali dalam satu *walk*. Sedangkan *vertex* mungkin muncul lebih dari satu kali. Contoh *walk* dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 4 merupakan gambar graf dengan 5 *vertex* dan 8 *edge*. Salah satu *walk* pada graf tersebut ditunjukkan pada garis tebal, yaitu $v_1\ a\ v_2\ b\ v_3\ d\ v_4\ h\ v_5\ f\ v_2$.

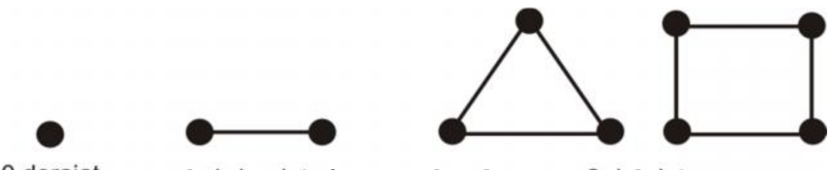
Selain dari *walk*, diperlukan pula definisi mengenai graf terhubung dan graf teratur. Berikut adalah definisi dari graf terhubung.

Definisi 2.5. Graf Terhubung (*Connected Graphs*) (Munir, 2010)

Graf tak berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang *vertex* u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v (yang juga harus berarti ada lintasan dari u ke v). Jika tidak, maka G dikatakan tidak terhubung. Sedangkan definisi graf teratur, dipaparkan sebagai berikut.

Definisi 2.6. Graf Teratur (*Regular Graphs*) (Munir, 2010)

Graf yang setiap *vertex*nya mempunyai derajat yang sama disebut graf teratur atau *regular*. Apabila derajat setiap *vertex* adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r. Contoh graf teratur berderajat 0, 1 dan 2 pada gambar berikut.



Gambar 5. Graf teratur berderajat 0, 1 dan 2

.

Selain itu, untuk memperlihatkan suatu graf dikatakan *Hamiltonian*, maka diperlukan definisi dari sirkuit dan lintasan *Hamiltonian.* Berikut adalah definisi dari lintasan dan sirkuit *Hamiltonian.*

Definisi 2.7. Lintasan dan Sirkuit Hamilton (*Hamiltonian Paths* dan *Hamiltonian Circuits* /*Cycle*) (Deo, 1989)

Sirkuit Hamiltonian (*Hamiltonian circuits/cycle*) dalam graf terhubung didefinisikan pada *walk* tertutup dengan garis lintas setiap *vertex* dari *G* tepat satu kali, kecuali *vertex* awal. Lintasan Hamiltonian (*Hamiltonian paths*) dalam graf *G* melintasi setiap *vertex* dari *G*. Lintasan Hamiltonian adalah subgraf dari sirkuit Hamiltonian. Contoh sirkuit Hamiltonian dan lintasan Hamiltonian terlihat pada gambar berikut.

(a) (b)

Gambar 6. Contoh *Hamiltonian Circuits* (a) dan *Hamiltonian Paths* (b)

Gambar 6(a) merupakan contoh dari *Hamiltonian circuits*, garis tebal merupakan lintasan yang berbentuk sirkuit yaitu 1, 2, 4, 3, 1, sedangkan Gambar 6(b) merupakan contoh dari *Hamiltonian paths*, garis tebal menunjukkan lintasan Hamiltonian yaitu 3, 1, 2, 4.

Kemudian, diperlukan pula definisi mengenai *neighbours* dari suatu *vertex* yang diperlukan untuk menentukan setiap pasangan terurut pada *neighbors*.

Definisi 2.8. *Neighbours* (Harju, 2011)

Dalam teori graf, suatu *vertex* u dan v adalah *neighbours*, jika $u,v \in G$, dan *vertex* u dan v dihubungkan oleh *edge* yang sama.

Selanjutnya, untuk mempermudah dalam melakukan perhitungan mengenai banyaknya kemungkinan graf yang terbentuk dari suatu operator 3-*join*, diperlukan definisi mengenai permutasi dari suatu objek. Objek yang dimaksud disini adalah pasangan terurut dari *neighbours* suatu *vertex* utama. Berikut adalah definisi permutasi yang akan digunakan pada perhitungan banyaknya kemungkinan graf yang dapat dibentuk di hasil penelitian.

Definisi 2.9. Permutasi (Munir, 2010)

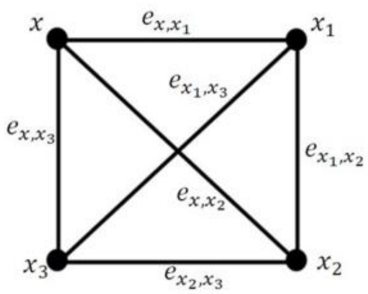
Permutasi adalah banyaknya urutan berbeda dari pengaturan objek – objek. Definisi ini diperlukan untuk menentukan banyaknya kemungkinan graf yang dapat dibentuk pada operator 3-*join*. Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(2)(1) = n!$.

Kemudian berikut ini definisi mengenai graf kubik yang akan digunakan pada operator 3-*join* pada dua graf kubik yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.10. Graf Kubik (*Cubic Graphs*) (Brinkmann., *et al*, 2011)

Graf kubik adalah suatu graf teratur dimana setiap *vertex*nya memiliki derajat 3 atau sering disebut graf teratur derajat 3 (3 *regular graph*).

Contoh graf kubik ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 7. Contoh graf kubik dengan 4 *vertex* dan 6 *edge*

Definisi selanjutnya yaitu mengenai 1-*fault tolerant Hamiltonian Graphs* yang akan dipaparkan pada sub bab berikut.

2.2. 1-*Fault Tolerant Hamiltonian Graphs*

1-*Fault Tolerant Hamiltonian Graphs* merupakan bentuk khusus dari *Hamiltonian Graphs*. Jika *Hamiltonian Graphs* merupakan graf yang mengandung *Hamiltonian Cycle* dan berderajat dua, maka 1-*Fault Tolerant Hamiltonian Graphs* adalah *Hamiltonian Graphs* jika salah satu *edge* pada setiap *vertex* dihapus satu.

Definisi mengenai 1-*fault tolerant Hamiltonian graphs*, selengkapnya dipaparkan pada definisi berikut.

Definisi 2.11. *1-Fault Tolerant Hamiltonian Graphs* (Teng., *et al*, 2005)

Suatu graf $G=(V,E)$ adalah *1-Edge Fault Tolerant Hamiltonian* jika $G-\{e\}$ adalah *Hamiltonian* untuk setiap $e \in E$ dan suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-Vertex Fault Tolerant Hamiltonian* jika $G-\{v\}$ adalah *Hamiltonian* untuk setiap $v \in V$. Setiap graf *1-Edge Fault Tolerant Hamiltonian* adalah *Hamiltonian*. Suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-Fault Tolerant Hamiltonian* jika $G-\{f\}$ adalah *Hamiltonian* untuk setiap $f \in E \cup V$.