II. LANDASAN TEORI

Generalized Lambda Distribution (GLD) awalnya diusulkan oleh Ramberg dan Schmeiser (1974), yang memiliki empat parameter dari pengembangan distribusi Lambda Tukey. Keluarga distribusi Lambda Tukey didefinisikan oleh fungsi persentil $Q(u)$ yang berasal dari distribusi lambda satu parameter yang diusulkan oleh John Tukey (1960).

$$Q(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\lambda} - (1-u)^{\lambda}}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \dfrac{\log(u)}{1-u}, & \lambda = 0, u \neq 1 \end{cases} \quad di \qquad 1 \geq u \geq 0.$$

Distribusi lambda Tukey digeneralisasi dengan tujuan untuk membangkitkan varietas acak dalam pembelajaran simulasi Monte Carlo ke dalam empat parameter GLD .

GLD telah diaplikasikan dalam mencocokkan dan memodelkan kejadian di banyak bidang dengan fungsi densitas yang kontinu. Yang paling menarik dari GLD adalah pendekatan untuk menentukan parameternya yang didasarkan pada penyesuaian terhadap empat momen pertama dari berbagai macam bentuk distribusi. Untuk mengkaji hubungan *generalized lambda distribution* terhadap distribusi gamma dengan menggunakan metode pencocokan momen, diperlukan konsep-konsep dan teori-teori yang mendukung dari ilmu statistika matematika modern.

Generalized Lambda Distribution (GLD) dengan parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, GLD $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, dengan fungsi persentilnya (invers dari fungsi distribusinya F(x)),

$$F^{-1}(x) = Q(y) = Q(y; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

dengan $0 \leq y \leq 1$.

Parameter λ_1 dan λ_2 menunjukkan lokasi dan skala parameter (*scale parameter*), λ_3 dan λ_4 menunjukkan kemiringan (*skewness*) dan keruncingan (*kurtosis*) dari GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dan fkp untuk GLD akan diberikan pada Teorema 1. Pada penelitian ini, akan dikaji mengenai hubungan antara GLD dan distribusi gamma dengan menggunakn metode pencocokan momen. Definisi berikut adalah definisi tentang fungsi gamma.

Definisi 2.1 Fungsi Gamma

Fungsi gamma didefinisikan sebagai berikut :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, d \quad ; \qquad \alpha > 0$$

(Myers, dkk, 2007)

Sedangkan untuk fungsi distribusi kumulatif dari distribusi gamma berbentuk :

$$F(x; \alpha) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\, d$$

(Herrhyanto & Gantini, 2009)

Definisi berikut adalah tentang fungsi densitas distribusi gamma.

Definisi 2.2 Fungsi Densitas Distribusi Gamma

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Gamma, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad ; \qquad 0 \leq x \leq \infty$$

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi Gamma adalah $G(x;\ \alpha,\ \beta)$, artinya peubah acak X berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β, dimana α menunjukkan *scale* (skala dan lokasi) dan β menunjukkan *shape* (*skewness* dan *kurtosis*).

Mean, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi gamma dirumuskan sebagai berikut :

1. $\mu = \alpha\beta$
2. $\sigma^2 = \alpha\,\beta^2$
3. $M_x(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$; t < $\frac{1}{\beta}$ (Herrhyanto & Gantini, 2009)

Dalam mengkaji hubungan suatu distribusi satu terhadap distribusi lainnnya dapat dilakukan dengan melihat fungsi distribusinya atau dengan menggunakan metode pencocokan momen. Dari kedua cara tersebut, penggunaan metode pencocokan momen merupakan cara yang lebih efisien dalam mengkaji hubungan suatu distribusi terhadap distribusi lain karena memiliki bentuk yang lebih sederhana pada umumnya jika dibandingkan dengan fungsi distribusinya. Definisi berikut adalah tentang metode momen.

Definisi 2.3 Metode Momen

Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ peubah acak bebas dan berdistribusi identik, masing-masing dengan fungsi densitas $F(x|\theta)$ untuk suatu θ tertentu dengan $\theta \in \Theta \subseteq R^r$. Bila momen tersebut ada, maka metode momen dari $\theta_1, \ldots, \theta_r$ adalah sebagai berikut

$$\mu'_k = m'_k (k = 1, \ldots, r).$$

Pada definisi di atas $\mu'_k = EX_1^k$ adalah momen pusat ke k, sedangkan m'_k momen sampel takpusat ke k. Jadi metode momen merupakan metode yang menyamakan r momen populasi yang pertama dengan T momen sampel yang pertama dan mengambil jawaban yang menghasilkan dalam $\theta_1, \ldots, \theta_r$(bila jawaban ada) sebagai penduga $\theta_1, \ldots, \theta_r$ (Dudewicz dan Misra, 1995).

Definisi 2.4 Momen

Jika X adalah peubah acak diskrit dan *p(x)* adalah nilai fungsi peluang dari X di *x*, maka momen pusat ke-k (dinotasikan dengan μ_k) didefinisikan sebagai :

$$\mu_k = \sum_x (x - \mu)\ k.p(x)$$

Jika X adalah peubah acak kontinu dan *f(x)* adalah nilai fungsi densitas dari X di *x*, maka momen pusat ke-k (dinotasikan dengan μ_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k\ f(x)\ d$$

(Herrhyanto & Gantini, 2009)

Berikut diberikan definisi dari momen pertama, kedua, ketiga dan momen ke empat.

Definisi 2.5 Momen Pertama

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan nilai fungsi densitas dar X di *x* adalah *f(x)*, maka momen pertama terhadap rataan dari peubah acak X disebut dengan *mean* dan didefinisikan sebagai :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, . \, f(x) d$$

Definisi 2.6 Momen Kedua

Misal X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Momen kedua terhadap rataan dari peubah acak X disebut dengan *varians* dan didefinisikan sebagai :

$$V \quad (X) = E[X - E(X)]^{2}$$

Atau ;

$$V \quad (X) = E(X - \mu)^{2}$$

(Herrhyanto &Gantini, 2009)

Definisi 2.7 Momen Ketiga

Momen ketiga terhadap rataan disebut dengan *skewness* (kemencongan) dari peubah acak X dan didefinisikan sebagai ;

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E[X - E(X)]^3}{\sigma^3}$$

Definisi 2.8 Momen Keempat

Momen keempat terhadap rataan disebut dengan *kurtosis* dari peubah acak X dan didefinisikan sebagai ;

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E[X - E(X)]^4}{\sigma^4}$$ (Dudewicz & Mishra, 1995).