III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2011/2012. Bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini ditujukan untuk mengkaji hubungan *generalized lambda distribution* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ terhadap distribusi Gamma (α, β) dengan menggunakan metode pencocokan momen. Langkah pertama yang dilakukan yaitu membuktikan empat momen pertama pada GLD. Untuk menunjukkan empat momen pertama GLD, kita harus mendefinsikan terlebih dahulu fungsi densitas dari GLD itu sendiri, serta teorema-teorema yang mendukung untuk menyelesaikan pembuktian empat momen pertama pada GLD. Untuk lebih memahami, Karian dan Dudewicz (2000) telah menjelaskannya dalam teorema berikut.

Teorema 1.

Untuk GLD $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, fungsi densitasnya adalah

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}} \qquad ; \qquad x = Q(y)$$

Bukti :

Jika $x = Q(y)$, maka kita memiliki $y = F(x)$. Diturunkan terhadap x, maka diperoleh

$$\frac{d}{d} = f(x)$$

Atau

$$f(x) = \frac{d}{d(Q(y))} = \frac{1}{\frac{d(Q(y))}{d}}$$

Karena bentuk dari $Q(y)$ pada fungsi peluang dari GLD sudah diketahui, maka :

$$\frac{d(Q(y))}{d} = \frac{d}{d}\left(\lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}\right)$$

$$= \frac{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}}{\lambda_2}$$

Sehingga,

$$f(x) = \frac{1}{\frac{d(Q(y))}{d}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}}{\lambda_2}}$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}}$$

Jadi terbukti bahwa $f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}}$

Teorema 2.

Jika variabel acak X adalah GLD $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka variabel acak

$X + \lambda_1$ merupakan GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Bukti :

Jika X adalah GLD$(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka dari definisi GLD dapat diperoleh

$$Q(y) = \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

Sekarang

$$F_{X+\lambda_1}(x) = P[X + \lambda_1 \leq x] = P[X \leq x - \lambda_1] = F_X(x - \lambda_1),$$

Oleh karena itu $F_X(x - \lambda_1) = y$ yang mengakibatkan $F_{X+\lambda_1}(x) = y$,

Menghasilkan

$$x - \lambda_1 = Q_X(y)$$

$$x = \lambda_1 + Q_X(y)$$

$$x = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2},$$

Ini membuktikan bahwa variabel acak $X + \lambda_1$ merupakan GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

Teorema 3.

Jika X adalah suatu variabel acak dari GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka $Z = X - \lambda_1$ merupakan GLD $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

Bukti :

Jika X adalah GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka

$Q_X(y) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$, dan

$$F_{X-\lambda_1}(x) = P[X - \lambda_1 \leq x] = P[X \leq x + \lambda_1] = F_X(x + \lambda_1),$$

Jika kita menentukan $F_X(x + \lambda_1) = y$, maka kita memperoleh

$$x + \lambda_1 = Q_X(y) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \text{ }, x = Q_{X-\lambda_1}(y),$$

Selain itu kita juga memiliki $F_{X-\lambda_1}(x) = y$ dimana

$$Q_{X-\lambda_1}(y) = x = \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2},$$

Ini membuktikan bahwa $X - \lambda_1$ merupakan GLD $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

Teorema 4.

Jika Z adalah GLD $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka $E(Z^k)$, nilai harapan dari Z^k, diberikan oleh

$$E(Z^k) = \frac{1}{\lambda_2^k} \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} (-1)^i \beta(\lambda_3(k-i) + 1, \lambda_4 i + 1) \right]$$

Dimana $\beta(a, b)$ adalah fungsi beta yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} d$$

Bukti :

$$E(Z^k) = \int_{-\infty}^{\infty} z^k f(z) d$$

Dari Teorema 1 diketahui $z = Q(y)$ dengan $y = F(z)$ diperoleh

$y = F(z)$ maka $d \quad = f(z)d$. Dengan $0 \leq y \leq 1$ maka,

$$E(Z^k) = \int_0^1 \left(Q(y)\right)^k d$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}\right)^k d \quad = \frac{1}{\lambda_2^k} \int_0^1 \left(y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}\right)^k d$$

Dari teorema binomial,

$$\left(y^{\lambda_3}-(1-y)^{\lambda_4}\right)^k=\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}\left(y^{\lambda_3}\right)^{k-i}(-(1-y)^{\lambda_4})^i\right]$$

Sehingga diperoleh

$$E(Z^k)=\frac{1}{\lambda_2^k}\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}(-1)^i\int_0^1 y^{\lambda_3(k-1)}(1-y)^{\lambda_4 i}\,d\quad\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda_2^k}\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}(-1)^i\beta(\lambda_3(k-i)+1,\lambda_4 i+1)\right]$$

Jadi terbukti bahwa :

$$E(Z^k)=\frac{1}{\lambda_2^k}\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}(-1)^i\beta(\lambda_3(k-i)+1,\lambda_4 i+1)\right]$$

Teorema 5.

Jika X adalah GLD $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ dengan $\lambda_3>-\frac{1}{4}$ dan $\lambda_4>-\frac{1}{4}$ maka empat momen pertamanya adalah $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ (*mean*, *variance*, *skewness*, *kurtosis*). Sehingga didapatkan :

$$\alpha_1=\mu=E(X)=\lambda_1+\frac{A}{\lambda_2}$$

$$\alpha_2=\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=\frac{B-A^2}{{\lambda_2}^2}$$

$$\alpha_3=\frac{E[(X-E(X))^3]}{\sigma^3}=\frac{C-3A\quad+2A^3}{{\lambda_2}^3\sigma^3}$$

$$\alpha_4=\frac{E[(X-E(X))^4]}{\sigma^4}=\frac{D-4A\quad+6A^2B-3A^4}{{\lambda_2}^4\sigma^4}$$

Dimana

$$A=\frac{1}{1+\lambda_3}-\frac{1}{1+\lambda_4}$$

$$B=\frac{1}{1+2\lambda_3}+\frac{1}{1+2\lambda_4}-2\beta(1+\lambda_3,1+\lambda_4)$$

$$C=\frac{1}{1+3\lambda_3}-\frac{1}{1+3\lambda_4}-3\beta(1+2\lambda_3,1+\lambda_4)+3\beta(1+\lambda_3,1+2\lambda_4)$$

$$D = \frac{1}{1+4\lambda_3} + \frac{1}{1+4\lambda_4} - 4\beta(1+3\lambda_3, 1+\lambda_4) + 6\beta(1+2\lambda_3, 1+2\lambda_4)$$

$$-4\beta(1+\lambda_3, 1+3\lambda_4)$$

Langkah selanjutnya yaitu memberikan empat momen pertama pada distribusi gamma $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Maka keempat momen pertamanya adalah sebagai berikut :

Momen pertama :

$$\alpha_1 = \mu = E(X) = \alpha\ \beta$$

Momen kedua :

$$\alpha_2 = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \alpha\ \beta^2$$

Momen ke-tiga :

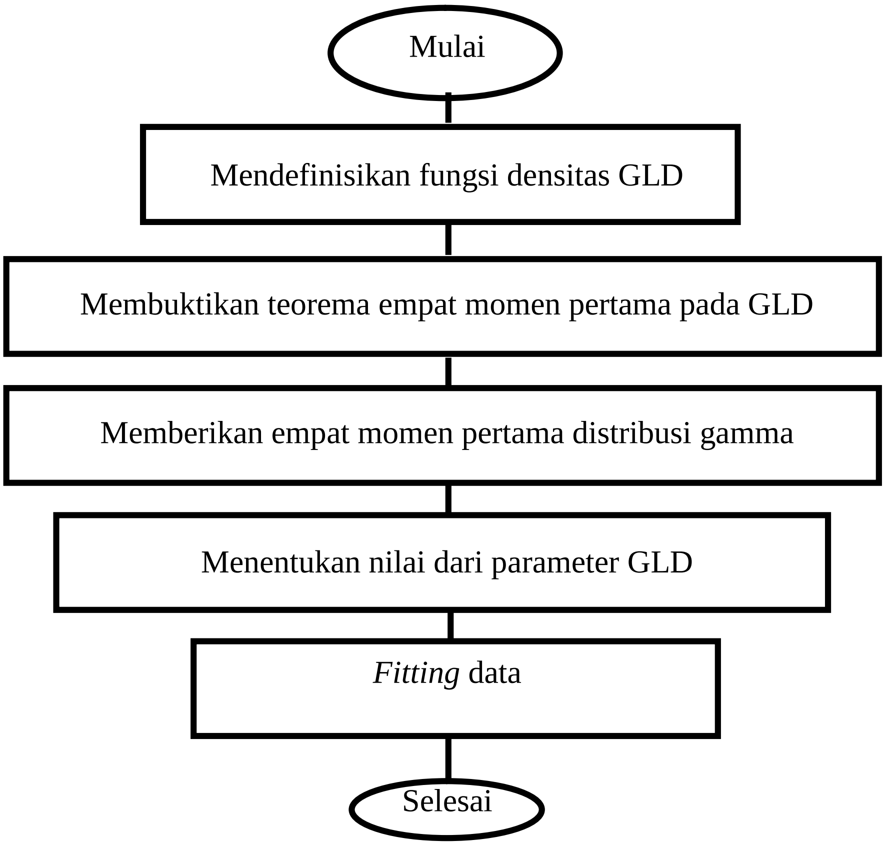
$$\alpha_3 = \frac{1}{\sigma^2} E(X) - E(X))^3 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Momen ke-empat :

$$\alpha_4 = \frac{1}{\sigma^4} E(X) - E(X))^4 = 3 + \frac{6}{\alpha}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai dari parameter GLD yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ berdasarkan empat momen pertama dari distribusi gamma dengan nilai α dan β yang telah disesuaikan dan melakukan *fitting* kurva untuk memperoleh bentuk kurva dari distribusi gamma yang paling mendekati bentuk dari GLD untuk memperoleh nilai α dan β dari distribusi gamma yang mampu mendekati GLD dengan sebaik mungkin.

Berikut langkah-langkah penelitian jika digambarkan dalam bentuk diagram alir :



Gambar 3.1   Langkah – langkah penelitian