

## II. LANDASAN TEORI

Peubah acak  $X(s)$  merupakan sebuah fungsi  $X$  yang menetapkan setiap anggota  $s \in S$  ( $S$  ruang sampel) dengan sebuah bilangan real. Salah satu peubah acak adalah peubah acak diskrit, yaitu banyaknya nilai-nilai yang mungkin dari  $X$  ( $X$  adalah peubah acak) berhingga atau tak berhingga tapi dapat dihitung. Dalam peubah acak diskrit, nilai-nilai yang mungkin merupakan bilangan bulat. Kemudian dapat menghitung nilai peluang dari masing-masing nilai peubah acak tersebut, apabila nilai peluang dari peubah acak tersebut mempunyai persyaratan tertentu maka nilai peluang tersebut dinamakan fungsi peluang. Distribusi yang mempunyai bentuk fungsi peluang dari peubah acak diskrit disebut distribusi khusus diskrit, yaitu salah satunya adalah distribusi poisson atau model poisson.

### 2.1 Model Poisson

Peubah acak  $X$  dikatakan berdistribusi Poisson, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}; x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson adalah sebagai berikut:

1.  $\mu = \theta$

$$2. \sigma^2 = \theta$$

$$3. M_x(t) = e^{\theta(e^t-1)}; t \in \mathfrak{R}. \text{ (Nar Herrhyanto dan Tuti Gantini, 2009).}$$

## 2.2 Metode Bayes

Misalkan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  merupakan sampel acak berukuran  $n$  dari distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang berbentuk  $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$  dan sebaran dari peubah acak  $\theta$  yaitu  $\pi(\theta)$  (sebaran prior).

Langkah-langkah untuk menentukan penduga bayes bagi  $\theta$  adalah:

1. Menentukan fungsi kepekatan peluang bersama dari  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dengan  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) \cdot \pi(\theta) \quad (2.2)$$

2. Menentukan sebaran marginal yang diperoleh dengan mengintegalkan fungsi kepekatan peluang bersama sebagai berikut:

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) \cdot \pi(\theta) d\theta \quad (2.3)$$

3. Menentukan sebaran posterior atau fungsi kemungkinan sebagai berikut:

$$f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{m(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (2.4)$$

(John E Freund dan Gary A Simon, 1999).

## 2.3 Model Poisson-Gamma

Model poisson-gamma merupakan model poisson campuran yang menggunakan prior gamma sebagai alternatif untuk menyelesaikan masalah overdispersi. Model poisson-gamma dapat ditulis sebagai:

$$X_i \sim \text{Poisson}(\theta_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

$\theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Misalkan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sampel acak dengan fungsi peluang:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}; \quad x = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

Dengan sebaran prior fungsi densitas gamma:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha} \theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta}; \quad 0 \leq \theta < \infty \quad (2.6)$$

Maka didapatkan fungsi bersama model poisson-gamma sebagai berikut:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha} \theta^{\alpha-1} e^{-\theta/\beta} \quad (2.7)$$

Sebaran marginal diperoleh dengan mengintegrasikan fungsi bersama sebagai berikut:

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha x!} \Gamma(x + \alpha) \left( \frac{1}{1 + 1/\beta} \right)^{(x+\alpha)} \quad (2.8)$$

Dengan demikian fungsi kemungkinan model poisson-gamma adalah:

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \theta^{\alpha-1} e^{-\theta(1+1/\beta)}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(x_i + \alpha) \left( \frac{1}{1+1/\beta} \right)^{(\sum_{i=1}^n x_i + n\alpha)}} \quad (2.9)$$

(Michalis K. Titsias, 2012).

#### 2.4 Algoritma EM (*Expectation Maximization*)

Algoritma EM merupakan metode untuk pendugaan parameter dari fungsi kemungkinan pada data tidak teramati, terutama digunakan untuk sebaran campuran karena ada data tidak teramati. Ada dua tahap dalam menggunakan algoritma EM, yaitu tahap E (*Expectation*) dan tahap M (*Maximization*). Dalam tahap E yaitu mencari nilai harapan penduga parameter dan tahap M yaitu memaksimumkan nilai harapan ke fungsi kemungkinan.

Misalnya  $Y_i = (X_i, Z_i)$  adalah data lengkap, dimana  $X_i$  data yang teramati dan  $Z_i$  data yang tidak teramati. Sehingga pada tahap E dari iterasi ke-(k+1), nilai harapan *loglikelihood* dari model data lengkap dapat dihitung dengan rumus  $Q(\varphi|\varphi^{(k)}) = E [\log p(Y|\varphi) |X, \varphi^{(k)}]$  dengan menggunakan sebaran bersyarat  $f(Y|X, \varphi^{(k)})$ . Pada tahap M nilai  $Q(\varphi|\varphi^{(k)})$  dimaksimumkan terhadap  $\varphi$ , dimana  $\varphi$  merupakan penduga parameter tertentu. Ketika model data lengkap berasal dari keluarga eksponensial, maka tahap E dihitung nilai harapan bersyarat dari statistik cukupnya.

Nilai-nilai data yang tidak teramati dalam sebaran campuran adalah realisasi dari  $\theta_i$  dimana  $\theta_i$  adalah parameter yang tidak teramati untuk setiap  $X_i$ . Sehingga pada tahap E, perlu menghitung nilai harapan bersyarat dari fungsi  $\theta_i$ (tidak teramati) dan memaksimumkan fungsi kemungkinan dari model data lengkap yang direduksi dari sebaran campuran.

Beberapa tahap untuk mencari nilai penduga kemungkinan maksimum dengan algoritma EM, yaitu:

1. Pada tahap E, menggunakan nilai dugaan terakhir atau saat ini  $\varphi^{(k)}$  dari iterasi ke-k, kemudian hitung nilai *pseudo* (samaran)  $t_i = E[h_j(\theta)|X, \varphi^{(k)}]$ , dimana  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  ketika  $h_i(\cdot)$  adalah fungsi sebaran tertentu dan  $\varphi$  adalah nilai penduga.
2. Pada tahap M, menggunakan nilai *pseudo*  $t_i$  dari tahap E untuk memaksimumkan kemungkinan dari sebaran campuran dan diperoleh nilai terbaru dari  $\varphi$  yaitu  $\varphi^{(k+1)}$  dari iterasi ke-(k+1).

3. Ketika selisih  $\varphi^{(k)}$  dan  $\varphi^{(k+1)}$  kurang dari suatu bilangan yang sangat kecil maka iterasi akan berhenti, jika tidak iterasi berlanjut ke tahap E.  
(Dempster AP, 1977).

## 2.5 Metode Newton-Raphson

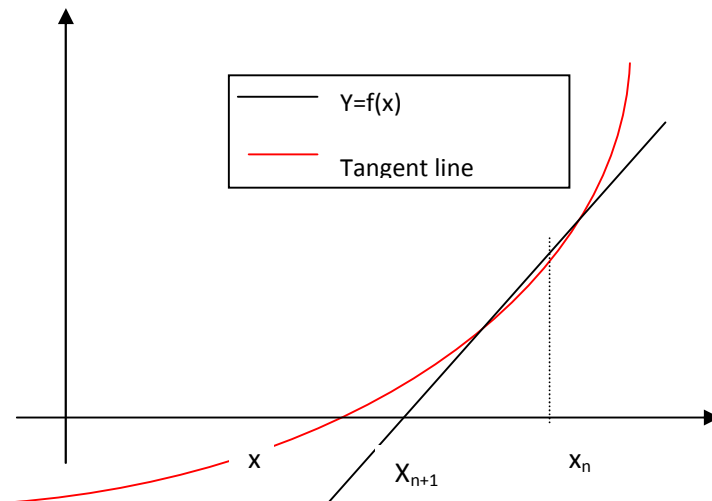
Kebanyakan persoalan model matematika dalam bentuk yang rumit tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusi eksak. Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi dari persoalan model matematika tersebut masih dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik.

Dalam metode numerik, pencarian akar  $f(x) = 0$  dilakukan dengan iterasi. Diantara semua metode akar, metode Newton-Raphsonlah yang paling terkenal dan paling banyak dipakai dalam terapan sains dan rekayasa. Metode ini paling disukai karna tingkat konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya.

Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode Newton-Raphson yaitu:

1. Penurunan rumus metode Newton-Raphson secara geometri

Misal  $f(x) = 0$  adalah suatu persamaan yang mempunyai akar  $x$  dan  $f$  dapat dideferensialkan, sehingga  $y = f(x)$  memiliki garis singgung di setiap titik pada kurva fungsinya. Perhatikan grafik berikut ini:



Gambar 2.1 Grafik pendekatan metode Newton-Raphson.

Dari gambar 1, gradient garis singgung di  $x_r$  adalah:

$$m = f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_r) - 0}{x_r - x_{r+1}} = \frac{f(x_r)}{x_r - x_{r+1}} \quad (2.10)$$

Sehingga prosedur iterasi metode Newton-Raphson adalah:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, f'(x_r) \neq 0 \quad (2.11)$$

## 2. Penurunan rumus Newton-Raphson dengan deret Taylor

Uraikan  $f(x_{r+1})$  disekitar  $x_r$  ke dalam deret Taylor:

$$f(x_{r+1}) = f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2} f''(t), x_r < t < x_{r+1} \quad (2.12)$$

Apabila deret tersebut dipotong sampai orde ke-2 maka persamaannya akan menjadi:

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) \quad (2.13)$$

Dan karena persoalan mencari akar,  $f(x_{r+1}) = 0$  sehingga:

$$f(x_{r+1}) = f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) = 0 \quad (2.14)$$

atau

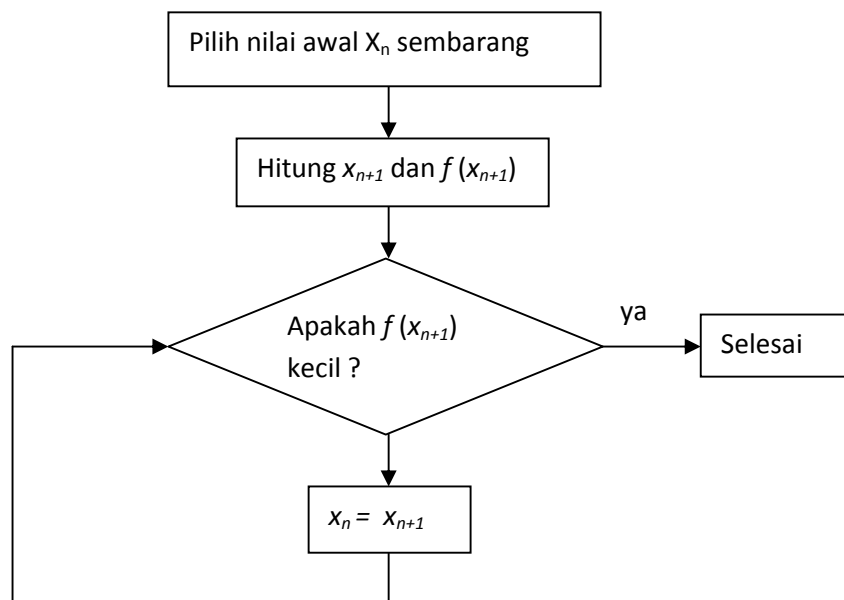
$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, f'(x_r) \neq 0 \quad (2.15)$$

yang merupakan rumus metode Newton-Raphson.

Kondisi berhenti iterasi Newton-Raphson adalah apabila  $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$

atau bila menggunakan galat relative hampiran  $\left| \frac{|x_{r+1} - x_r|}{x_{r+1}} \right| < \delta$ , dengan  $\varepsilon$

dan  $\delta$  adalah toleransi galat yang diinginkan.



Gambar 2.2 Diagram alir mode iterasi Newton-Raphson

(Rinaldi Munir, 2003).