II. LANDASAN TEORI

Barisan adalah suatu susunan bilangan yang dibentuk menurut suatu urutan tertentu. Nilai-nilai dari suatu fungsi yang daerah asalnya himpunan bilangan asli disebut dengan suku-suku. Perubahan antara suku-suku berurutan ditentukan oleh penjumlahan bilangan tertentu atau suatu kelipatan bilangan tertentu. Barisan dapat dinyatakan dalam rumus eksplisit atau rumus rekursif.

2.1 Barisan

Menurut Leithold (1991), suatu barisan takhingga $a_1, a_2, a_3, \ldots$ adalah susunan bilangan terurut sesuai dengan urutan bilangan asli sebagai indeksnya, atau suatu fungsi riil yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan asli. Barisan takhingga dapat disajikan sebagai $\{a_n\}_{(n=1)}^{\infty}$ atau $\{a_n\}$.

Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut konvergen ke L, atau berlimit L, dan ditulis

$$a_n \to L, \qquad \text{jika } n \to \infty,$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Jika untuk setiap bilangan positif ε ada bilangan positif N, sehingga jika $n \geq N$ maka $|a_n - L| < \varepsilon$.

Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga disebut divergen.

2.2 Barisan Fibonacci, Lucas dan Gibonacci

Beberapa bentuk barisan takhingga yang divergen, diantaranya barisan Fibonacci, Lucas, dan Gibonacci.

Dalam bukunya *Proofs that really count the art of combinatorial proof* , Benjamin dan Jennifer (2003) menuturkan:

Barisan Fibonacci F_n didefinisikan dengan $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ untuk $n \geq 3$,

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

Tabel 2.1 Daftar 10 Suku Pertama Barisan Fibonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Sedangkan, barisan Lucas L_n didefinisikan dengan $L_1 = 1, L_2 = 3$ untuk $n \geq 3$,

$$L_n = L_{n-2} + L_{n-1}.$$

Tabel 2.2 Daftar 10 Suku Pertama Barisan Lucas

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Kalman dan Mena (2003) dalam jurnalnya mendefinisikan *Generalized Fibonacci dan Lucas Number*: Jika diberikan bilangan bulat non-negatif A dan B maka bentuk umum barisan Fibonacci adalah

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \text{dan untuk } n \geq 2, \qquad F_n = AF_{n-2} + BF_{n-2}.$$

Bentuk umum barisan Lucas adalah

$$L_0 = 2, L_1 = A, \text{dan untuk } n \geq 2, \qquad Ln = BL_{n-2} + AL_{n-1}.$$

Barisan Gibonacci didefinisikan sebagai $f(p,n)$ dimana p mewakili penjumlahan p suku sebelumnya dan n adalah suku ke- n barisan Gibonacci.

$$f(p,n) = f(p,n-1) + f(p,n-2) + \cdots + f(p,n-p-1) + f(p,n-p).$$

Secara umum barisan Gibonacci dapat ditulis sebagai:

$$f(p,n) = \sum_{i=1}^{p} f(p,n-i).$$

Untuk barisan Fibonacci, suku-sukunya didapatkan dengan menjumlahkan tepat dua suku sebelumnya, maka dalam barisan Gibonacci, $p = 2$, barisan Fibonacci $f(2,n)$ dinyatakan sebagai:

$$f(2,n) = f(2,n-1) + f(2,n-2), \qquad \text{untuk } n \geq 2.$$

Dalam penelitian ini barisan $f(2,n)$ untuk $p = 2$ dinyatakan dengan G_n.

Barisan Gibonacci G_n didefinisikan dengan barisan bilangan bulat positif $G_1, G_2, G_3 \ldots$, untuk $n \geq 3$ dan $0 < G_1 \leq G_2$,

$G_n = G_{n-2} + G_{n-1}$, (Hayes dan Tatiana, 2004).

Secara umum barisan Gibonacci dapat tulis G (untuk Generalized) dengan suku awal a dan b, yaitu: $G\ (0) = a$ dan $G\ (1) = b$. Ketika suku awal hanya a dan b, dapat ditulis $G(i)$ untuk nilai di dalamnya, untuk barisan Gibonacci yang berbeda yaitu dengan suku awal yang berbeda dapat ditulis $G(a,b,i)$.

Tabel 2.3 Daftar Beberapa Barisan Gibonacci

i	a=G(0)	b=G(1)	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	...
G(1,1,i)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
G(1,2,i)	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
G(2,3,i)	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...
G(1,0,i)	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	...
G(–1,1,i)	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	...

Untuk menentukan suku ke-n barisan Fibonacci dan Lucas dapat menggunakan formula Binet. Formula Binet merupakan solusi bentuk tertutup dari barisan Fibonacci. Formula ini pertama kali ditemukan oleh Abraham De Moivre.

Perbandingan dari barisan Fibonacci yang berurutan $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ mendekati bilangan Phi (φ) yang disebut juga sebagai *golden number*.

Berikut adalah formula Binet untuk menentukan suku ke-n dari barisan Fibonacci dan Lucas:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1,2,3 \ldots$$

Dengan

$$\varphi = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ dan \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \text{(Hoggatt, 1969)}.$$

Nilai $\varphi = 2 \cdot cos\, 36°$ atau mendekati 1,618033989....

Banyak identitas barisan Fibonacci dan Lucas yang telah ditemukan. Berikut adalah beberapa identitas dari barisan Fibonacci dan Lucas:

1) $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1, n \geq 1$
2) $L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 3, n \geq 1$
3) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}, n \geq 1$
4) $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2, n \geq 1$
5) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}, n \geq 1$
6) $L_1 + L_3 + L_5 + \cdots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2, n \geq 1$
7) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, n \geq 1$
8) $L_2 + L_4 + L_6 + \cdots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1, n \geq 1$
9) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, n \geq 1$
10) $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5 \cdot (-1)^n, n \geq 1$, (Hoggatt, 1969).

Untuk membuktikan beberapa identitas di atas, digunakan suatu metode pembuktian matematika, diantaranya induksi matematika.

2.3 Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam Matematika. Induksi Matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran, dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

Prinsip induksi matematika adalah sebagai berikut:

Misalkan $P(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Untuk membuktikan proposisi ini, hanya perlu menunjukkan bahwa:

a. $P(1)$ benar, dan

b. jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n, (Munir, 2010).