III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2011-2012 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Mula-mula dikumpulkan dan dipelajari literatur (buku-buku) yang berhubungan dengan barisan Fibonacci, Lucas, dan Gibonacci. Langkah selanjutnya, untuk menentukan formula Binet barisan Gibonacci, diperlukan formula Binet barisan Fibonacci dan Lucas. Seperti yang telah diketahui, formula Binet barisan Fibonacci dan Lucas adalah:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1,2,3 \ldots$$

dengan:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dan } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Untuk mencari suku ke-n dari bilangan Fibonacci dan Lucas, dapat menggunakan formula Binet. Ada beberapa cara untuk membuktikan formula tersebut, berikut adalah salah satu cara pembuktian formula Binet:

Barisan Fibonacci merupakan barisan linier $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, namun barisan ini juga dapat didekati secara geometrik (Setiadi, 2009).

Diasumsikan bahwa $F_n = ar^n$ dimana a merupakan konstanta awal yang bukan nol. Dengan demikian :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$ar^n = ar^{n-1} + ar^{n-2}.$$

Dengan membagi kedua ruas dengan ar^{n-2}, didapat :

$$r^2 = r + 1, \text{atau}$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Akar-akar dari persamaan kuadrat di atas adalah :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{dan } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Dari $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ didapat $\alpha^2 = \alpha + 1$ (3.1)

Dengan mengalikan α^n ke persamaan (3.1), (dengan n bilangan bulat) didapat:

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$$

Jika diberikan $U_n = \alpha^n$, $n \geq 1$, maka diperoleh $U_1 = \alpha$ dan $U_2 = \alpha^2$, dan didapat barisan :

$$\alpha,\ \alpha^2 = \alpha + 1,\ \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha, \ldots \tag{3.2}$$

Dengan cara yang sama untuk $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ didapat :

$$\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$$

yang memenuhi :

$$\alpha + \beta = 1 \; dan \; \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

Barisan yang didapat adalah :

$$\beta,\ \beta^2 = \beta + 1,\ \beta^2 = \beta^2 + \beta \ \ldots \tag{3.3}$$

Jika anggota Persamaan (3.2) dikurangi dengan anggota Persamaan (3.3) dan setiap anggota dari persamaan yang dihasilkan dibagi dengan $(\alpha - \beta)$, maka didapat :

$$\frac{(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})}{(\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{(\alpha - \beta} + \frac{(\alpha^{n} - \beta^{n})}{(\alpha - \beta)}$$

Jika diberikan $U_n = \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)}$, $n \geq 1$ maka diperoleh $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$, serta

$$U_1 = \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)} = 1$$

$$U_2 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha - \beta)} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{\sqrt{5}} = 1$$

Dengan demikian, barisan $\mathrm{U_n}$ adalah barisan Fibonacci. Sehingga, formula Binet untuk barisan Fibonacci adalah:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, n = 1,2,3, \ldots$$

Sekarang, misalkan anggota dari Persamaan (3.1) ditambah dengan anggota dari Persamaan (3.2), didapat :

$$(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) = (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + (\alpha^n + \beta^n)$$

Jika diberikan $U_n = (\alpha^n + \beta^n)$, maka diperoleh $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$, serta

$$U_1 = (\alpha + \beta) = 1$$

$$U_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha + 1 + \beta + 1 = (\alpha + \beta) + 2 = 1 + 2 = 3$$

Dengan demikian, barisan $\mathrm{U_n}$ adalah barisan Lucas. sehingga formula Binet untuk barisan Lucas adalah :

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1,2,3 \ldots$$

Setelah diperoleh formula Binet barisan Gibonacci, langkah selanjutnya adalah mencoba menemukan hubungan antara barisan Gibonacci dengan barisan Fibonacci atau Lucas.

Selanjutnya, untuk mendapatkan beberapa identitas Gibonacci, penulis menghubungkan beberapa identitas barisan Fibonacci dan Lucas, berikut beberapa identitas barisan yang dimaksud:

1) $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1, n \geq 1$
2) $L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 3, n \geq 1$
3) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1},\ n \geq 1$
4) $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2, n \geq 1$
5) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n},\ n \geq 1$
6) $L_1 + L_3 + L_5 + \cdots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2,\ n \geq 1$
7) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1,\ n \geq 1$
8) $L_2 + L_4 + L_6 + \cdots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1,\ n \geq 1$
9) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,\ n \geq 1$
10) $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5 \cdot (-1)^n,\ n \geq 1$

Dari beberapa identitas barisan Fibonacci dan Lucas di atas, dapat dibuktikan dengan induksi matematika sebagai berikut:

Bukti (1) dengan induksi matematika, akan dibuktikan:

$$P(n): F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1, \qquad n \geq 1$$

Ada dua bagian dari pembuktian ini:

1. Pernyataan $P(1)$ didapatkan dengan mensubtitusikan $n = 1$.

   Di sini $P(1)$ adalah $F_1 = F_3 - 1$ benar karena $1 = 2 - 1$

2. Langkah pembuktian: jika $P(k)$ benar untuk beberapa bilangan bulat k $(k \geq 1)$, maka $P(k+1)$ harus benar

   Diasumsikan:

   $$P(k): F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$$

   Harus dibuktikan benar untuk:

   $$P(k+1): F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

   Dengan menambahkan F_{k+1} di kedua ruas:

   $$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$$

   Diperoleh:

   $$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k + F_{k+1} &= F_{k+2} + F_{k+1} - 1 \\ &= F_{k+3} - 1 \end{aligned}$$

   Karena $F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1}$, sehingga $P(k+1)$ benar.

   Kesimpulan: $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ untuk setiap n bilangan bulat, benar.

Bukti (2) dengan induksi matematika, akan dibuktikan:

$$P(n): L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 3, \qquad n \geq 1$$

Ada dua bagian dari pembuktian ini:

1. Penyataan $P(1)$ didapatkan dengan mensubtitusikan $n = 1$.

   Di sini $P(1)$ adalah $L_1 = L_3 - 3$ benar, karena $1 = 4 - 3$

2. Langkah pembuktian: jika P(k) benar untuk beberapa bilangan bulat k $(k \geq 1)$, maka $P(k+1)$ harus benar

Diasumsikan:

$$P(k): L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_k = L_{k+2} - 3$$

Harus dibuktikan benar untuk

$$P(k+1): L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_{k+1} = L_{k+3} - 3$$

Dengan menambahkan L_{k+1} di kedua ruas

$$L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_k = L_{k+2} - 3$$

Diperoleh:

$$L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_k + L_{k+1} = L_{k+2} + L_{k+1} - 3$$

$$= L_{k+3} - 3$$

Karena $L_{k+3} = L_{k+2} + L_{k+1}$, sehingga $P(k+1)$ benar

Kesimpulan: $L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = L_{n+2} - 3$ untuk setiap n bilangan bulat, benar.

Bagian pertama dari pembuktian, dimana $P(1)$ dibuktikan dengan mensubtitusikan $n = 1$, sering disebut sebagai basis induksi. Jelas, jika pernyataan tidak benar, maka pembuktian tidak dapat dilanjutkan. Bagian kedua sering disebut dengan langkah induksi. Asumsi bahwa $P(k)$ benar untuk beberapa bilangan bulat k $(k \geq 1)$ adalah hipotesis induksi. Jika dapat ditunjukkan bahwa hipotesis induksi cukup untuk membuktikan bahwa $P(k+1)$ benar, maka langkah induksi telah selesai.

Pembuktian identitas selanjutnya adalah:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}, \qquad n \geq 1$$

Akan dibuktikan dengan induksi matematika, diperoleh:

$$P(n): F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Maka:

$$P(1): F_1^2 = F_1 F_2 \text{ benar}$$

Karena $(1)^2 = (1)(1)$, maka basis induksi telah selesai.

Sekarang, asumsikan

$$P(k): F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_k^2 = F_k F_{k+1}$$

Adalah benar (hipotesis induksi), dan akan dibuktikan benar untuk :

$$P(k+1): F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} F_{k+2}$$

Dengan menambahkan $\mathrm{F}_{\mathrm{k+1}}^2$ ke kedua ruas P(k), didapat

$$\begin{aligned}(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_k^2) + F_{k+1}^2 &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} F_{k+2}\end{aligned}$$

$P(k+1)$ juga benar, dan langkah induksi selesai.

Bukti (4) dengan induksi matematika, akan dibuktikan:

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2, \qquad n \geq 1$$

Didapat

$$P(n): L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2$$

Maka:

$$L_1^2 = L_1 L_2 - 2$$

Karena $1^2 = 1 \cdot 3 - 2, 1 = 1$, maka basis induksi selesai.

Sekarang asumsikan:

$$P(k): L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_k^2 = L_k L_{k+1} - 2$$

Adalah benar (hipotesis induksi), dan akan dibuktikan benar untuk :

$$P(k+1): L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_{k+1}^2 = L_{k+1} L_{k+2} - 2$$

Dengan menambahkan F_{k+1}^2 ke kedua ruas $P(k)$, didapat:

$$(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \cdots + L_k^2) + L_{k+1}^2 = L_k L_{k+1} - 2 + L_{k+1}^2$$

$$= L_k L_{k+1} + L_{k+1}^2 - 2$$

$$= L_{k+1}(L_k + L_{k+1}) - 2$$

$$= L_{k+1} L_{k+2} - 2$$

Sehingga, $P(k+1)$ juga benar, dan langkah induksi selesai.

Untuk identitas (5), (6), (7) dan (8) dapat dibuktikan dengan cara yang sama seperti pada identitas (1) dan (2), dengan *n* diganti oleh $2n$.

Bukti (9) dengan induksi matematika, akan dibuktikan:

$$F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad n \geq 1$$

Dimulai untuk n=1, didapat:

$$P(1): F_0 F_2 - F_1^2 = 0 \cdot 1 - 1^2 = -1$$

Asumsikan untuk $k \geq 1$

$$P(k): F_{k-1} F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$$

Perhatikan untuk $P(k+1)$:

$$F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = F_k (F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}^2$$

$$= F_k F_{k+1} + F_k F_k - F_{k+1}^2$$

$$= F_kF_{k+1} - F_{k+1}^2 + F_k^2$$

$$= F_{k+1}(F_k - F_{k+1}) + F_k^2$$

$$= F_{k+1}(-F_{k-1}) + F_k^2$$

$$= F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1}$$

$$= (-1)F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2$$

$$= (-1)(-1)^k$$

$$= (-1)^{k+1}$$

Sehingga, $P(k+1): F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ benar.

Bukti (10) dengan induksi matematika, akan dibuktikan:

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5 \cdot (-1)^n, n \geq 1$$

Dimulai untuk n=1, didapatkan:

$$P(1): L_0L_2 - L_1^2 = 2 \cdot 3 - 1^2 = -5$$

Asumsikan benar untuk $k \geq 1$:

$$P(k): L_{k-1}L_{k+1} - L_k^2 = -5 \cdot (-1)^k$$

Perhatikan untuk $P(k+1)$:

$$L_kL_{k+2} - L_{k+1}^2 = L_k(L_{k+1} + L_k) - L_{k+1}^2$$

$$= L_kL_{k+1} + L_kL_k - L_{k+1}^2$$

$$= L_kL_{k+1} - L_{k+1}^2 + L_k^2$$

$$= L_{k+1}(L_k - L_{k+1}) + L_k^2$$

$$= L_{k+1}(-L_{k-1}) + L_k^2$$

$$= L_k^2 - L_{k+1}L_{k-1}$$

$$= (-1)L_{k-1}L_{k+1} - L_k^2$$

$$= (-1) - 5 \cdot (-1)^k$$

$$= -5 \cdot (-1)^{k+1}$$

Sehingga, $P(k+1): L_k L_{k+2} - L_{k+1}^2 = -5 \cdot (-1)^{k+1}$ benar.

Untuk langkah yang terakhir dalam penelitian ini, akan didapatkan contoh penerapan barisan Fibonacci pada *forex trading* untuk meramalkan harga saham.

Langkah-langkah penelitian tersebut dapat digambarkan dalam diagram alir sebagai berikut :