I. TINJAUAN PUSTAKA

1.1 Distribusi Normal Multivariat

Akan dibahas dua definisi dari multivariat normal. Definisi yang pertama didefinisikan melalui fungsi kepekatan peluangnya, dan definisi yang kedua berdasarkan sifat unik dari distribusi normal multivariat, yaitu suatu kombinasi linier dari elemen-elemennya adalah normal multivariat.

Definisi Distribusi Normal Multivariat

Misal $\mathbf{y} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_d})'$ adalah vektor berdimensi d dari suatu peubah acak, maka **y** disebut memiliki (nonsingular) distribusi multivariat normal jika fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\theta})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\theta})\right] \quad (2.1)$$

$$;\left(-\infty < y_j < \infty\ j = 1,2,..d\right)$$

Dimana $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_j\ ]$ adalah definit positif ($\Sigma > O$) Seber(1983).

Hal ini telah dibuktikan pada Seber(1977), bahwa $\varepsilon(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\theta}$ dan $\mathcal{D}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\Sigma}$,

Maka dapat disimbolkan dengan notasi $\boldsymbol{y} \sim N_d(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ atau $\boldsymbol{y} \sim N_d$. Terdapat dua kasus yang paling khusus yakni sebagai berikut:

1. $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\theta} \sim N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.
2. Jika $\mathbf{y}_i$ adalah saling bebas dengan distribusi normal univariat $N_1\left(\theta_j, \sigma^2\right)$ $(j = 1,2, \ldots, d)$ maka $\boldsymbol{y} \sim N_d(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mathbf{I}_d)$.

Sekarang akan dibahas beberapa sifat utama dari distribusi normal multivariat.

Teorema 2.1

Menurut Seber (1983), anggap $\boldsymbol{y} \sim N_d(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ dan misalkan

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^{(1)} \\ \boldsymbol{y}^{(2)} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^{(1)} \\ \boldsymbol{\theta}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{\Sigma}_1 \\ \boldsymbol{\Sigma}_2 & \boldsymbol{\Sigma}_2 \end{pmatrix}$$

Dimana $\mathbf{y}^{(i)}$ dan $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ adalah d_i x 1 vektor dan $\boldsymbol{\Sigma}_{ii}$ adalah d_i x d_i ($d_1 + d_2 = d$),

maka berlaku:

(1) Jika **C** adalah matriks q x d dengan rank q, maka $\boldsymbol{C} \sim N_q(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C\Sigma C'})$.

(2) Suatu anggota himpunan bagian dari y memiliki distribusi normal multivariat:

$\boldsymbol{y}^{(1)} \sim N_{d1}(\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_1)$.

(3) Fungsi pembangkit momen dari y adalah

$$M(\boldsymbol{t}) = E(\exp(\boldsymbol{t'y}))$$

$$= \exp(\boldsymbol{t'\theta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t'\Sigma t}) \qquad (2.2)$$

(4) $\mathbf{y}^{(1)}$ dan $\mathbf{y}^{(2)}$ adalah i.i.d jika dan hanya jika $\mathscr{C}(\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}) = \mathbf{0}$.

(5) Jika $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{y}$(i=1,2,…,m) dan $\mathscr{C}(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j) = \mathbf{0}$ untuk semua i,j dimana $i \neq j$, maka $\mathbf{u}_i$ bebas stokastik identik.

(6) $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\theta})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\theta}) \sim \chi^2_d$.

1.2 Distribusi Wishart

1.2.1 Definisi dan Sifat

Seperti sebagian besar distribusi, distribusi Wishart dibangkitkan dari distribusi sampling melalui suatu sampel statistik. Pada kasus ini,

$\sum_i (\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})\ (\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})'$, merupakan suatu analogi multivariat dari jumlah kuadrat pada univariat $\sum_i (y_i - \bar{y})^2$ (Johnson dan Kortz, 1972). Dua definisi Wishart adalah sebagai berikut:

Definisi 2.a Distribusi Wishart

Misal **W** = (w_{jk}) adalah matrik simetris berukuran dxd dari suatu peubah acak yang definit positif, dengan peluang 1, dan misalkan **Σ** adalah matriks definit positif berukuran dxd. Jika m adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $m \geq d$, maka **W** dikatakan memiliki distribusi Wishart nonsingular dengan derajat bebas m jika fungsi kepekatan peluang dari $\frac{1}{2}d(d+1)$ elemen-elemen yang berbeda dari **W** adalah:

$$f(w_1\ , w_1\ , \dots , w_d\ ) = C^{-1}|\boldsymbol{W}|^{(m-d-1)/2} e^{t \quad (-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{w})} \qquad (2.3)$$

Dimana

$$C = 2^{m\ /2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{m}{2}}\Gamma_d(\tfrac{1}{2}m) \qquad (2.4)$$

Dan

$$\Gamma_d\left(\frac{1}{2}m\right) = \pi^{d(d-1)/4}\prod_{j=1}^{d}\Gamma(\tfrac{1}{2}(m+1-j)) \qquad (2.5)$$

Dapat ditulis $\boldsymbol{W} \sim W_d(m, \boldsymbol{\Sigma})$ atau $\boldsymbol{W} \sim W_d$ (Mardia, Kent, dan Bibby, 1979).

Definisi 2.b Distribusi Wishart

Anggap bahwa $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_m}$ adalah bebas stokastik identik $N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ maka

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i{}' \qquad (2.6)$$

Dikatakan memiliki distribusi Wishart dengan derajat bebas m.

Jika $\boldsymbol{\Sigma} > \boldsymbol{O}$, dan $m \geq d$ maka dapat ditunjukkan bahwa **W** > **O**, dengan peluangnya adalah 1 (Mardia,Kent, dan Bibby, 1979).

Teorema 2.2

Jika $\boldsymbol{W} \sim W_d(m, \boldsymbol{\Sigma})$ dan **C** adalah matriks berukuran qxd dengan rank q, maka

$\mathbf{C}\quad{}' \sim \mathrm{W_q}(\mathrm{m}, \mathbf{C}\ \ \mathbf{C}')$ (Seber,1983).

Bukti:

Misal $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ i.i.d $N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ dan misal $\boldsymbol{W_0} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x_i x_i}'$, kemudian $\boldsymbol{W_0} \sim W_d(m, \boldsymbol{\Sigma})$ maka $\boldsymbol{C W_0 C}'$ memiliki distribusi yang sama seperti $\mathbf{C}\quad{}'$.

Sekarang perhatikan

$$\boldsymbol{C W_0 C}' = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{C}\ \ _{\boldsymbol{i}})(\boldsymbol{C x_i})'$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{y_i})(\boldsymbol{y_i})' \qquad (2.7)$$

Dimana, berdasarkan teorema 2.1 (1), $\mathbf{y_i}$ bebas stokastik identik $N_q(0, \boldsymbol{C\Sigma}\ \ ')$, karena itu berdasarkan persamaan (2.6) diperoleh $\mathbf{C W_0 C}' \sim \mathrm{W_q}(\mathrm{m}, \mathbf{C}\ \ \mathbf{C}')$.

Corollary

Jika $\boldsymbol{\ell}$ adalah vektor taknol berukuran d x 1, maka $\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{W}\ \ \sim \sigma_\ell^2 \chi_m^2$, dimana $\sigma_\ell^2 = \boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\ell} > 0$ (karena Σ>0).

Bukti:

Misal $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\ell}$ pada pembuktian teorema 2.2, maka berdasarkan persamaan (2.7) $\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{W_0}\boldsymbol{\ell} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{y_i^2}$ dimana $\mathbf{y_i}$ adalah i.i.d $N_1(0, \sigma_\ell^2)$. Karena itu jika $\boldsymbol{\ell} \neq \mathbf{0}$, maka $\frac{\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{W}}{\sigma_\ell^2} \sim \chi_m^2$.

Lemma

Anggap $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}$ adalah i.i.d $N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ dan misal $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)'$ maka berlaku sifat-sifat berikut ini:

(1) $\boldsymbol{x}^{(j)} \sim (\mathbf{0}, \sigma_{j.}\, \boldsymbol{I}_m)$

(2) Jika **a** adalah vektor konstan berukuran m x 1, maka $\boldsymbol{X'a} \sim N_d(\mathbf{0}, \|\boldsymbol{a}\|^2 \boldsymbol{\Sigma})$

(3) Jika $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r\}, r \leq m$, adalah himpunan vektor orthogonal berukuran m x 1, maka vektor acak $\boldsymbol{X'a_i}; (i = 1,2, \dots, r)$ adalah saling bebas.

(4) Jika **b** adalah vektor konstan berukuran d x 1, maka $\boldsymbol{X}\ \sim N_m(\mathbf{0}, \sigma_b^2 \mathbf{I}_m)$ dimana $\sigma_b^2 = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{\Sigma}$ (Seber, 1983).

Bukti:

(1) Anggota ke j dari $\mathbf{x}_i$ adalah $N_m(\mathbf{0}, \sigma_j\ )$.

(2) $\boldsymbol{X'a} = \sum_{\alpha=1}^{m} \boldsymbol{a_\alpha x_\alpha} \sim N_d(\mathbf{0}, \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha^2\, \boldsymbol{\Sigma})$ (2.8)

(3) Misal $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{a_i}$ dan misal $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i}\ )'$ maka

$$\mathcal{C}[\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j] = \mathcal{C}\left[\sum_\alpha a_{i\alpha}\, \boldsymbol{x}_\alpha, \sum_\beta a_{j}\ \ \boldsymbol{x}_\beta\right]$$

$$= \sum_\beta \sum_\alpha \alpha_{i\alpha}\, a_j\ \ \mathcal{C}[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta]$$

$$= \sum_\alpha a_{i\alpha}\, a_j\ \ \mathcal{D}[\boldsymbol{x}_\alpha]$$

$$= \boldsymbol{a}'_i \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{\Sigma}$$

$$= \boldsymbol{O}.$$

Berdasarkan teorema 2.1 (5), $\mathbf{u}_i$ adalah saling bebas.

(4) Misal $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\ \ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x'}_1\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x'}_2\boldsymbol{b} \\ \cdot \\ \vdots \\ \boldsymbol{x'}_m\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$

Maka elemen-elemen $\mathbf{y}_i$ dari **y** adalah bebas stokastik identik $N_1(0, \sigma_b^2)$

$$\sigma_b^2 = v\ \ \ [\boldsymbol{x'}_i\boldsymbol{b}] = \mathcal{D}[\boldsymbol{b'x}_i] = \boldsymbol{b'\Sigma b}.$$

Corollary

Misal $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{I}_m/m$, maka $\|\boldsymbol{a}\|^2 = 1/m$, dan berdasarkan lemma (2) di atas,

$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X'a} \sim N_d\left(\boldsymbol{0}, {}^{\boldsymbol{\Sigma}}/_{m}\right)$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa sifat-sifat dari bentuk kuadratik berkembang menjadi kasus multivariat.

Teorema 2.3

Misal $\boldsymbol{X'} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m)$ dimana $\mathbf{x}_i$ adalah i.i.d $N_d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Dan misal $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}$ dimana $\boldsymbol{\ell}(\neq 0)$ adalah vektor konstan berukuran d x 1, dan misalkan **A** dan **B** adalah matrik simetris berukuran m x m dengan rank r dan s. **b** adalah vektor konstan berukuran m x 1 (Seber,1983).

(1) $\boldsymbol{X'A} \sim W_d(r, \boldsymbol{\Sigma})$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{y'A} \sim (\sigma_\ell^2 \chi_r^2)$ untuk suatu $\boldsymbol{\ell}$, dimana $\sigma_\ell^2 = \boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\ell}$.

(2) $\boldsymbol{X'A}$ dan $\boldsymbol{X'B}$ memiliki distribusi Wishart independen, dengan derajat bebas r dan s, jika dan hanya jika $\frac{\boldsymbol{y'A}}{\sigma_\ell^2}$ dan $\frac{\boldsymbol{y'B}}{\sigma_\ell^2}$ adalah berdistribusi khi-kuadrat independen, dengan derajat bebas r dan s, untuk suatu $\boldsymbol{\ell}$.

(3) $\boldsymbol{X'b}$ dan $\boldsymbol{X'A}$ bedistribusi N_d dan $W_d(r, \boldsymbol{\Sigma})$ independen, jika dan hanya jika $\boldsymbol{y'b}$ dan ${}^{\boldsymbol{y'A}\,'}/_{\sigma_\ell^2}$ berdistribusi N_1 dan χ_r^2 untuk suatu $\boldsymbol{\ell}$.

Bukti:

(1) Diberikan $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X'A} \sim W_d(r, \boldsymbol{\Sigma})$. Maka $\boldsymbol{y'A} = \boldsymbol{\ell'X'A} = \boldsymbol{\ell'W} \sim \sigma_\ell^2 \chi_r^2$, (berdasarkan teorema 2.2, corollary).

Kebalikanya, anggap bahwa $\frac{\boldsymbol{y'A}}{\sigma_\ell^2} \sim \chi_r^2$ untuk beberapa $\boldsymbol{\ell}$, maka karena $\boldsymbol{y} \sim N_m(\mathbf{0}, \sigma_\ell^2 \boldsymbol{I}_m)$, (berdasarkan lemma (4)) mengikuti pada suatu definisi dari matriks idempotent yang menjelaskan bahwa, suatu matriks **P** idempotent jika $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, dan berlaku juga hal-hal dibawah ini:

1. Jika **P** merupakan matrik idempotent dengan rank r,maka dapat dituliskan dalam bentuk $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{t}_i \boldsymbol{t'}_i$.

Dimana $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_r$ bentuk dari himpunan ortonormal

2. Anggap $\boldsymbol{y} \sim N_d(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_d)$ dan **P** adalah matrik simetrik berukuran

d x d, maka $\frac{\boldsymbol{y'P}}{\sigma_\ell^2} \sim \chi_r^2$ jika dan hanya jika **P** adalah idempotent dengan

rank r.

berdasarkan keterangan di atas, maka dapat ditulis

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{a}_i \, \boldsymbol{a'}_i \qquad (2.9)$$

Dimana $\mathbf{a}_i$ adalah suatu himpunan vektor eigen yang ortonormal yang disamakan dengan r eigen value dari **A**, karena itu

$$\boldsymbol{X'A} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{X'} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a'}_i \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u'}_i$$

Dimana $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{X'a}_i$, berdasarkan lemma (2) dan (3), $\mathbf{u}_i$ adalah i.i.d $N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, karena $\|\boldsymbol{a}_i\|^2 = 1$, maka $\boldsymbol{X'A} \sim W_d(r, \boldsymbol{\Sigma})$.

(2) diberikan $\boldsymbol{X'A}$ dan $\boldsymbol{X'B}$ berdistribusi Wishart independen, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{y'A}$ dan $\boldsymbol{y'B}$ i.i.d, menjadi fungsi dari matriks Wishart, pembuktian ini, setipe dengan pembuktian pada bagian (1) di atas.

Sebaliknya, anggap bahwa $\frac{\boldsymbol{y'A}}{\sigma_\ell^2}$ dan $\frac{\boldsymbol{y\prime B}}{\sigma_\ell^2}$ berdistribusi χ_r^2 dan χ_s^2 independen, untuk beberapa $\boldsymbol{\ell}$, **A** dan **B** adalah matriks idempotent dengan rank r dan s, dan **A.B** = **0**, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{T} \boldsymbol{a_i a'}_i$ dan $\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{T} \boldsymbol{b_i b'_i}$

Dimana ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,,..., $\mathbf{a}_r$) dan ($\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$,..., $\mathbf{b}_s$) adalah himpunan eigen vektor yang ortonormal, dan karena itu

$$\boldsymbol{X'A} = \sum_{i=1}^{T} \boldsymbol{u_i u'_i} \qquad (2.10)$$

dan

$$\boldsymbol{X'B} = \sum_{i=1}^{T} \boldsymbol{v_j v'_j}$$

Dimana $\boldsymbol{u_i} = \boldsymbol{X'a_i}$, $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{X'b_j}$, dan himpunan {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_1$,..., $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1$,..., $\mathbf{v}_s$,} independen [berdasarkan lemma (3)].

(3) Anggap bahwa $\boldsymbol{X'b}$ dan $\boldsymbol{X'A}$ berdistribusi N_d dan W_d independen,

Maka: $\boldsymbol{y'b} = \boldsymbol{\ell' X'b}$ adalah N_1 dan $\boldsymbol{Y'A} \sim (\sigma_\ell^2 \chi_r^2)$. Seperti pada bukti yang pertama, $\boldsymbol{y'b}$ dan $\boldsymbol{y'A}$ idependen.

Sebaliknya, Anggap bahwa $\boldsymbol{y'b}$ dan $\boldsymbol{y'A}$ berdistribusi N_1 dan $\sigma_\ell^2 \chi_r^2$ yang idependen, untuk beberapa $\boldsymbol{\ell}$. Berdasarkan lemma (2), $\boldsymbol{X'b} \sim N_d$, dan juga berdasarkan (1), $\boldsymbol{X'A} \sim W_d(r, \boldsymbol{\Sigma})$. Karena $\boldsymbol{y} \sim N_m(\boldsymbol{0}, \sigma_\ell^2 \boldsymbol{I}_m)$, $\boldsymbol{y'b} \sim N_1(\boldsymbol{0}, \sigma_\ell^2 \boldsymbol{b'b})$. $\boldsymbol{y'b}\ \boldsymbol{'y/b'b} \sim \sigma_\ell^2 \chi_1^2$ dan $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b'} = \boldsymbol{0}$. Dengan mengalikan dengan **b**, maka didapatkan **Ab** = **0**, dengan demikian sesuai dengan (2), {$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_r$, **b**} adalah saling orthogonal. Oleh karena itu $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_r$ dan $\boldsymbol{X'b}$ saling bebas, dan $\boldsymbol{X'b}$ juga saling bebas dengan $\boldsymbol{X'A}$ (persamaan 2.10).

Corollary 1

$\boldsymbol{X'A} \sim W_d(r, \boldsymbol{\Sigma})$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{A}$.

Corollary 2

Variable Wishart $\boldsymbol{X'A}$ dan $\boldsymbol{X'B}$ saling bebas jika dan hanya jika

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

Corollary 3

$\boldsymbol{X'A}$ dan $\boldsymbol{X'b}$ berdistribusi $W_d$dan N_d idependen, jika dan hanya jika $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{0}$.

2.3 Distribusi T^2-Hotelling

Jika $x \sim N_1(\mu, \sigma^2)$ dan $w \sim \sigma^2 \chi^2_m$, w idependen terhadap x, maka

$$T = \frac{(\bar{x}-\mu)/_{\sigma}}{(w/m\sigma^2)^{1/2}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{(w/m)^{1/2}} \sim t_m \qquad (2.11)$$

Dimana t_m berdistribusi t dengan m derajat bebas, karena itu

$$T^2 = \frac{m(\bar{x}-\mu)^2}{w} = m(\bar{x} - \mu)w^{-1}(\bar{x} - \mu) \sim F_{1,m}$$

Generalisasi dari statistik di atas disebut T^2 statistik.

$$T^2 = m(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{W}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'$$

Dimana $\boldsymbol{x} \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{W} \sim W_d(m, \boldsymbol{\Sigma})$, **x** dan **W** saling bebas, dan kedua distribusi tersebut nonsingular (Seber, 1983).

Teorema 2.4

Misal $T^2 = m\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{y}$, dimana $\boldsymbol{y} \sim N_d(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ dan $\boldsymbol{W} \sim W_d(m, \boldsymbol{\Sigma})$, **y** dan **W** saling bebas. (diasumsikan bahwa distribusinya nonsingular $\boldsymbol{\Sigma} > O$, dan $m \geq d$, dengan demikian $\mathbf{W}^{-1}$ ada, dengan peluang 1) (Seber,1983).

$$\frac{m-d+1}{d}\frac{T^2}{m} \sim F_{d,m-d+1} \qquad (2.12)$$

2.4 Distribusi Beta Multivariat

2.4.1 Pengenalan

Anggap $H \sim \sigma^2\chi^2_m$ dan $E \sim \sigma^2\chi^2_m$, H dan E saling bebas.

H merupakan jumlah kuadrat, dan E merupakan kuadrat galat. Maka fungsi kepekatan peluang dari $V = \frac{E}{E+H}$ adalah:

$$g(v) = \frac{1}{B(m\ /2, m\ /2)} v^{\left(\frac{m}{2}\right)-1}(1-v)^{\left(\frac{m}{2}\right)-1} \quad ;0 \leq v < 1$$

Dimana $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Agar lebih mudah, digunakan notasi $V \sim B_{m\ /2, m\ /2}$, dan V disebut berdistribusi beta tipe 1, dengan derajat bebas $m_H/2$ dan $m_E/2$ (Seber, 1983).

Hasil yang terdahulu dapat digeneralisasi ke dalam kasus, dimana **H** dan **E** adalah matriks yang berdistribusi Wishart independen nonsingular. $\boldsymbol{H} \sim W_d(m_H, \boldsymbol{\Sigma})$ dan $\boldsymbol{E} \sim W_d(m_E, \boldsymbol{\Sigma})$, dengan $m_H, m_E \geq d$. $\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}}$ tidak simetris, namun karena **E** + **H** adalah matriks definit positif, dengan peluang 1, maka kesimetrisan dapat dipenuhi dengan mendefinisikan matrik definit positif sebagai berikut:

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{H})^{-1/2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{H})^{-1/2} \quad (2.13)$$

Dimana $(\mathbf{E}+\mathbf{H})^{1/2}$ adalah akar kuadrat simetris dari **E**+**H**.

Teorema 2.5

Fungsi kepekatan dari $\frac{1}{2}d(d+1)$ elemen-elemen yang berbeda dari **V**, $g(v_1, v_1, \dots, v_d) =$ g(**V**) adalah sebagai berikut:

$$g(\boldsymbol{V}) = \frac{1}{B_d(m_H/2, m_E/2)} |\boldsymbol{V}|^{(m_E-d+1)/2} |\boldsymbol{I}_d - \boldsymbol{V}|^{(m_H-d-1)/2}; \boldsymbol{O} < \boldsymbol{V} < \mathbf{I}_d.$$

Dimana $B_d(a,b) = \frac{\Gamma_d(a)\Gamma_d(b)}{\Gamma_d(a+b)}$; $d \leq 2a, 2b$.

$\Gamma_d(a)$ didefinisikan pada persamaan (2.5), diasumsikan $d \leq m_H, m_E$ (Seber, 1983).

2.4.2 Distribusi U

fungsi **V** (persamaan 2.13) pada analisis multivariat disimbolkan dengan $U = |\boldsymbol{I}_d - \boldsymbol{V}|$. Menurut Anderson(1958), jika $\boldsymbol{I}_d - \boldsymbol{V}$ berdistribusi multivariat beta tipe 1, dengan derajat bebas $\frac{1}{2}m_E$ dan $\frac{1}{2}m_H$, maka dapat dikatakan bahwa U berdistribusi U dengan berajat bebas d, m_H, dan m_E.

$$U = \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}|} \quad (2.14)$$

$|\boldsymbol{E}| \neq O$, dimana $m_E \geq d$, untuk suatu $U \neq O$. Statistik U pada umumnya dilambangkan dengan Λ, yang pertama kali diperkenalkan oleh Wilks (1932).

Terdapat beberapa fakta utama mengenai distribusi U adalah sebagai berikut:

1. Distribusi U_{d,m_H,m_E} terkadang dituliskan dalam bentuk U_{m_H,d,m_E+m_H-d}, yang berguna jika $m_H < d$ seperti kasus dibawah ini.

2. Kasus sepesial saat d = 1

$$\frac{1-U_{1,m_H,m_E}}{U_{1,m_H,m_E}}\frac{m_E}{m_H} \sim F_{m_H,m_E} \text{ untuk suatu } m_H \qquad (2.15)$$

Saat $m_H = 1$

$$\frac{1-U_{d,1,m_E}}{U_{d,1,m_E}}\frac{m_E+1-d}{d} \sim F_{d,m_E+1-d} \text{ untuk suatu } d. \qquad (2.16)$$

Saat d = 2

$$\frac{1-U_{2,m_H,m_E}^{1/2}}{U_{2,m_H,m_E}^{1/2}}\frac{m_E-1}{m_H} \sim F_{2m_H,2(,m_E-1)} \text{ untuk } m_H \geq 2 \qquad (2.17)$$

Saat $m_H = 2$

$$\frac{1-U_{d,2,m_E}^{1/2}}{U_{d,2,m_E}^{1/2}}\frac{m_E+1-d}{d} \sim F_{2d,2(m_E+1-d)} \text{ untuk } d \geq 2 \qquad (2.18)$$

Rao(1951), menjelaskan pendekatan dan perluasan lain yang asimptotik, yang menjelaskan bahwa:

$$\frac{1-U_{d,m_H,m_E}^{1/t}}{U_{d,m_H,m_E}^{1/t}}\frac{f\ -g}{dm_H} \sim F_{dm_H,f\ -g} \qquad (2.19)$$

Dimana

$t = (\frac{d^2m_H^2-4}{d^2+m_H^2-5})^{1/2}$ dan $g = \frac{dm_H-2}{2}$

Persamaan ini mendekati distribusi F, tepatnya saat d atau m_H adalah 1 atau 2.