II. LANDASAN TEORI

Pada Bab ini akan diberikan istilah-istilah, definisi-definisi dan identitas-identitas dari Bilangan Fibonacci, Bilangan Lucas dan Bilangan Gibonaccci.

2.1 Bilangan Fibonacci dan Beberapa Identitasnya

Definisi 1: Barisan Fibonacci F_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai :

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1 \text{ dan untuk setiap } n \geq 2, \; F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \; .$$

[Benjamin et al,2003]

Beberapa bilangan pada Barisan Fibonacci di antaranya 0,1,1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34, 55, 89,144, 233....

Seperti telah disinggung pada bab sebelumnya, barisan Fibonacci mempunyai banyak keunikan. Tabel 2.1 memperlihatkan salah satu contohnya, bahwa untuk n semakin besar, nilai $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ mendekati $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398875 \ldots .$ Nilai φ lebih dikenal sebagai *golden rasio.*

Tabel 2.1 Perbandingan $\frac{F_{n+1}}{F_n}$

n	F_n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	n	F_n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$
1	1	$\frac{1}{1}$ =1,0000000000	11	89	$\frac{144}{89}$ ≈1,6180371353
2	1	$\frac{2}{1}$ =2,0000000000	12	144	$\frac{233}{144}$ ≈1,6180327869
3	2	$\frac{3}{2}$ =1,5000000000	13	233	$\frac{377}{233}$ ≈1,6180327869
4	3	$\frac{5}{3}$ ≈1,6666666667	14	377	$\frac{610}{377}$ ≈1,6180327869
5	5	$\frac{8}{5}$ =1,600000000	15	610	$\frac{987}{610}$ ≈1,6180327869
6	8	$\frac{13}{8}$ =1,6250000000	16	987	$\frac{1597}{987}$ ≈1,6180344478
7	13	$\frac{21}{13}$ ≈1,6153846154	17	1597	$\frac{2584}{1597}$ ≈1,6180338134
8	21	$\frac{34}{21}$ ≈1,6190476191	18	2584	$\frac{4181}{2584}$ ≈1,6180340557
9	34	$\frac{55}{34}$ ≈1,6176470588	19	4181	$\frac{6765}{4181}$ ≈1,6180339632
10	55	$\frac{89}{55}$ ≈1,6181818182	20	6765	$\frac{10946}{6765}$ ≈1,6180339985

Selanjutnya akan didiskusikan beberapa identitas yang fundamental dalam Bilangan Fibonacci. Identitas 1 memperlihatkan bahwa jumlah n bilangan dari barisan Fibonacci sama dengan bilangan ke (n+2) dikurangi dengan 1.

Identitas 1 :

$$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1 \qquad \text{[Koshy,2001]}$$

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 1, didapat $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$, sehingga :

$$F_0 = F_2 - F_1$$

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

.

.

.

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$\begin{aligned} F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n &= F_{n+2} - F_1 \\ &= F_{n+2} - 1 \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Untuk contoh, $F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_{10} = F_{12} - 1 = 144 - 1 = 143$. Hasil ini dapat diverifikasi dengan melakukan penghitungan secara langsung.

Untuk selanjutnya, pada Identitas 2 akan didiskusikan jumlah bilangan Fibonacci pada suku-suku yang genap, sedangkan pada Identitas 3 akan didiskusikan jumlah bilangan pada suku-suku ganjil.

Sebagai contoh, $F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{12} = F_{13} - 1 = 233 - 1 = 232$ dan $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{11} = F_{12} = 144$. Hasil ini dapat diverifikasi dengan melakukan penghitungan secara langsung.

Identitas 2 :

$$F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$ [Koshy,2001]

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 1, didapat $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$, sehingga :

$$F_0 = F_0,$$

$$F_2 = F_3 - F_1,$$

$$F_4 = F_5 - F_3$$

$$F_6 = F_7 - F_5$$

.

.

.

$$F_{2n-2} = F_{2n-1} - F_{2n-3}$$

$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$\begin{aligned} F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} &= F_{2n+1} - F_1 + F_0 \\ &= F_{2n+1} - 1 + 0 \\ &= F_{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

■

Identitas 3 :

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$ [Koshy,2001]

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 1, didapat $F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$, sehingga :

$$F_1 = F_2 - F_0,$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

.

.

.

$$F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4}$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} &= F_{2n} - F_0 \\ &= F_{2n} - 0 \\ &= F_{2n} \end{aligned}$$ ■

Identitas 4 merupakan identitas yang berkaitan dengan jumlah kuadrat dari setiap bilangan dari barisan Fibonacci.

Identitas 4 :

$$F_0{}^2 + F_1{}^2 + F_2{}^2 + \ldots + F_n{}^2 = F_n F_{n+1}$$ [Benjamin et al,2003]

Bukti :

Bukti dengan menggunakan Induksi Matematika.

Untuk n = 1, maka :

$$F_1{}^2 = F_1 F_2$$

$$1^2 = 1.1$$

$$1 = 1$$

Jadi hasil benar untuk n = 1.

Misalkan hasil juga benar untuk n = k :

$$F_0{}^2 + F_1{}^2 + F_2{}^2 + \ldots + F_k{}^2 = F_k F_{k+1}$$

Untuk n = k + 1, maka :

$$\begin{aligned} F_0{}^2 + F_1{}^2 + F_2{}^2 + \ldots + F_{k+1}{}^2 &= F_0{}^2 + F_1{}^2 + F_2{}^2 + \ldots + F_k{}^2 + F_{k+1}{}^2 \\ &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}{}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1}.F_{k+2} \qquad \text{(Berdasarkan Definisi 1)} \\ &= F_{(k+1)}.F_{(k+1)+1} \end{aligned}$$

Sehingga, pernyataan juga benar untuk n = k + 1. ■

Identitas 5 : (Cassini ' s Formula)

$$F_{n+1}.F_{n-1} = F_n{}^2 + (-1)^n$$ [Koshy,2001]

Bukti :

Bukti dengan menggunakan Induksi Matematika.

Untuk n = 1, maka :

$$F_2.F_0 = F_1{}^2 + (-1)^1$$

$$1.0 = 1 + (-1)^1$$

$$0 = 0$$

Jadi pernyataan benar untuk n = 1.

Misalkan hasil juga benar untuk n = k :

$$F_{k+1}.F_{k-1} = F_k{}^2 + (-1)^k$$

Untuk n = k+ 1, maka :

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+1}.F_{k+1}$$

$$F_{k+1}{}^2 = (F_{k+2} - F_k)F_{k+1}$$ (Berdasarkan Definisi 1)

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_{k+1} - F_k.F_{k+1}$$

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}(F_k + F_{k-1}) - F_k.F_{k+1} \qquad \text{(Berdasarkan Definisi 1)}$$

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_k + F_{k+2}.F_{k-1} - F_k.F_{k+1}$$

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_k + (F_{k+1} + F_k)F_{k-1} - F_k.F_{k+1} \quad \text{(Berdasarkan Definisi 1)}$$

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_k + F_{k+1}F_{k-1} + F_k\,.F_{k-1} - F_k.F_{k+1}$$

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_k + F_{k+1}F_{k-1} + F_k\,(F_{k-1} - F_{k+1})$$

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_k + F_{k+1}F_{k-1} + F_k\,(-F_k) \qquad \text{(Berdasarkan Definisi 1)}$$

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_k + F_{k+1}F_{k-1} - F_k{}^2$$

Berdasarkan Identitas 5 : $F_{n+1}.F_{n-1} = F_n{}^2 + (-1)^n$, maka :

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_k + (-1)^k$$

$$F_{k+1}{}^2 = F_{k+2}.F_k - (-1)^{k+1}$$

$$F_{k+2}.F_k = F_{k+1}{}^2 + (-1)^{k+1}$$

Sehingga pernyataan juga benar untuk n = k + 1. ■

2.2 Bilangan Lucas dan Beberapa Identitasnya

Definisi 2: Barisan Lucas L_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai :

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ dan untuk setiap } n \geq 2,\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\,.$$

[Benjamin et al, 2003]

Barisan Lucas merupakan barisan yang dikembangkan berdasarkan pola pada barisan Fibonacci. Perbedaan mendasar antara barisan Lucas dan barisan Fibonacci yaitu terletak pada suku pertamanya. Pada barisan Lucas, suku pertamanya adalah 2, sedangkan pada barisan Fibonacci adalah 0 atau 1.

Beberapa bilangan pada Barisan Lucas di antaranya 2,1, 3, 4, 7, 11,18, 29, 47,76,123,199,....

Berikut ini adalah beberapa identitas dalam Bilangan Lucas. Identitas 6 dan Identitas 7 merupakan identitas hubungan antara bilangan Lucas dengan bilangan Fibonacci.

Identitas 6 :

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$ [Dunlap, 2003]

Bukti :

Bukti dengan Induksi Matematika.

Untuk n = 1, maka :

$$L_1 = F_{1-1} + F_{1+1}$$

$$L_1 = F_0 + F_2$$

$$1 = 0 + 1$$

$$1 = 1$$

Jadi hasil benar untuk n = 1.

Misalkan hasil juga benar untuk n = k :

$$L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$$

$$L_{k-1} = F_{k-2} + F_k$$

Untuk n = k + 1, maka :

$$L_k + L_{k-1} = (F_{k-1} + F_{k+1}) + (F_{k-2} + F_k)$$

$$L_{k+1} = (F_{k-1} + F_{k-2}) + (F_{k+1} + F_k)$$ (Berdasarkan Definisi 2)

$$L_{k+1} = F_k + F_{k+2}$$ (Berdasarkan Definisi 1)

Sehingga pernyataan juga benar untuk n = k + 1. ∎

Identitas 7 :

$$L_n = F_n + 2 \ F_{n-1} \qquad \text{[Dunlap, 2003]}$$

Bukti :

Menurut Identitas 6, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ dan berdasarkan Definisi 1, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, maka :

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} \\ &= F_{n-1} + F_n + F_{n-1} && \text{(Berdasarkan Definisi 1)} \\ &= F_n + 2F_{n-1} && \blacksquare \end{aligned}$$

Empat identitas berikutnya berkaitan dengan jumlah bilangan dari barisan Lucas. Pada Identitas 8 didiskusikan jumlah bilangan hingga suku ke-n, dan pada Identitas 9 didiskusikan jumlah bilangan pada suku-suku genap, sedangkan jumlah bilangan untuk suku-suku ganjil didiskusikan pada Identitas 10. Pada Identitas 11 didiskusikan jumlah kuadrat dari setiap bilangan pada barisan Lucas.

Identitas 8 :

$$L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L_{n+2} - L_1 \qquad \text{[Koshy,2001]}$$

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 2, didapat $L_{n-2} = L_n - L_{n-1}$, sehingga :

$$L_0 = L_2 - L_1$$

$$L_1 = L_3 - L_2$$

$$L_2 = L_4 - L_3$$

$$L_3 = L_5 - L_4$$

.

.

.

$$L_{n-1} = L_{n+1} - L_n$$

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L_{n+2} - L_1$$

$$= L_{n+2} - 1 \qquad \blacksquare$$

Identitas 9 :

$$L_0 + L_2 + L_4 + \ldots + L_{2n} = L_{2n+1} + L_1$$ [Koshy,2001]

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 2, didapat $L_{n-1} = L_n - L_{n-2}$, sehingga :

$$L_0 = L_0,$$

$$L_2 = L_3 - L_1,$$

$$L_4 = L_5 - L_3$$

$$L_6 = L_7 - L_5$$

.

.

.

$$L_{2n-2} = L_{2n-1} - L_{2n-3}$$

$$L_{2n} = L_{2n+1} - L_{2n-1}$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$L_0 + L_2 + L_4 + \ldots + L_{2n} = L_{2n+1} - L_1 + L_0$$
$$= L_{2n+1} - 1 + 2$$
$$= L_{2n+1} + L_1 \qquad \blacksquare$$

Identitas 10 :

$$L_1 + L_3 + L_5 + \ldots + L_{2n-1} = L_{2n} - L_0$$

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 2, didapat $L_{n-1} = L_n - L_{n-2}$, sehingga :

$$L_1 = L_2 - L_0 ,$$
$$L_3 = L_4 - L_2$$
$$L_5 = L_6 - L_4$$
$$\vdots$$
$$L_{2n-3} = L_{2n-2} - L_{2n-4}$$
$$L_{2n-1} = L_{2n} - L_{2n-2}$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$L_1 + L_3 + L_5 + \ldots + L_{2n-1} = L_{2n} - L_0 \qquad \blacksquare$$

Identitas 11 :

$$L_0{}^2 + L_1{}^2 + L_2{}^2 + \ldots + L_n{}^2 = L_n L_{n+1} + L_0$$ [Dunlap, 2003]

Bukti :

Bukti dengan menggunakan Induksi Matematika.

Untuk n = 1, maka :

$$L_0{}^2 + L_1{}^2 = L_1 L_2 + L_0$$

$$2^2 + 1^2 = 1.3 + 2$$

$$4 + 1 = 3 + 2$$

$$5 = 5$$

Jadi hasil benar untuk n = 1.

Misalkan hasil juga benar untuk n = k :

$$L_0{}^2 + L_1{}^2 + L_2{}^2 + \ldots + L_k{}^2 = L_k L_{k+1} + L_0$$

Untuk n = k + 1, maka :

$$L_0{}^2 + L_1{}^2 + L_2{}^2 + \ldots + L_{k+1}{}^2 = L_0{}^2 + L_1{}^2 + L_2{}^2 + \ldots + L_k{}^2 + L_{k+1}{}^2$$

$$= L_k L_{k+1} + L_0 + L_{k+1}{}^2$$

$$= L_{k+1}(L_k + L_{k+1}) + L_0$$

$$= L_{k+1} L_{k+2} + L_0$$ (Berdasarkan Definisi 2)

$$= L_{(k+1)}.L_{(k+1)+1} + L_0$$

Sehingga pernyataan juga benar untuk n = k + 1. ■

Identitas 12 :

$$L_{n+1} L_{n-1} = L_n{}^2 - (-1)^n.5$$ [Benjamin et al, 1999]

Bukti :

Bukti dengan menggunakan Induksi Matematika.

Untuk n = 1, maka :

$$L_2.L_0 = {L_1}^2 - (-1)^1.5$$

$$3.2 = 1 - (-1)^1.5$$

$$6 = 6$$

Jadi pernyataan benar untuk n = 1.

Misalkan hasil juga benar untuk n = k :

$$L_{k+1}.L_{k-1} = {L_k}^2 - (-1)^k.5$$

Untuk n = k + 1, maka :

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+1}.L_{k+1}$$

$${L_{k+1}}^2 = (L_{k+2} - L_k)L_{k+1}$$ (Berdasarkan Definisi 2)

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}.L_{k+1} - L_k.L_{k+1}$$

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}(L_k + L_{k-1}) - L_k.L_{k+1}$$ (Berdasarkan Definisi 2)

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}L_k + L_{k+2}.L_{k-1} - L_k.L_{k+1}$$

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}L_k + (L_{k+1} + L_k)L_{k-1} - L_k.L_{k+1}$$ (Berdasarkan Definisi 2)

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}.L_k + L_{k+1}L_{k-1} + L_k.L_{k-1} - L_k.L_{k+1}$$

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}.L_k + L_{k+1}L_{k-1} + L_k(L_{k-1} - L_{k+1})$$

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}.L_k + L_{k+1}L_{k-1} + L_k(-L_k)$$ (Berdasarkan Definisi 2)

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}.L_k + L_{k+1}L_{k-1} - {L_k}^2$$

Karena $L_{k+1}L_{k-1} = {L_k}^2 - (-1)^k.5$, maka :

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}.L_k - (-1)^k.5$$

$${L_{k+1}}^2 = L_{k+2}.L_k + (-1)^{k+1}.5$$

Didapat :

$$L_{k+2}.L_k = {L_{k+1}}^2 - (-1)^{k+1}.5$$

Sehingga pernyataan juga benar untuk n = k + 1. ■

2.3 Bilangan Gibonacci dan Beberapa Identitasnya

Definisi 3: Barisan Gibonacci G_n adalah barisan yang didefinisikan sebagai :

$Bilangan\ bulat\ tak\ negatif$ dengan $G_0 = g_0,\ G_1 = g_1$ dan

untuk setiap $n \geq 2,\ \ G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$.

[Benjamin et al, 2003]

Sebagai contoh, jika $G_0 = 0,\ G_1 = 1$, akan didapat barisan Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Jika $G_0 = 1,\ G_1 = 1$, akan didapat barisan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Jika $G_0 = 2,\ G_1 = 1$, akan didapat barisan Lucas 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...Jika $G_0 = 3,\ G_1 = 2$, akan didapat barisan 3, 2, 5, 7, 12, 17, 29, 46, ...

Seperti halnya barisan Fibonacci dan barisan Lucas, barisan Gibonacci juga memiliki beberapa identitas. Berikut ini adalah beberapa identitas dalam Bilangan Gibonacci :

Identitas 13 :

$$G_0 + G_1 + G_2 + \ldots + G_n = G_{n+2} - g_1$$ [Dunlap, 2003]

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 3, didapat $G_{n-2} = G_n - G_{n-1}$, sehingga :

$$G_0 = G_2 - G_1$$

$$G_1 = G_3 - G_2$$

$G_2 = G_4 - G_3$

$G_3 = G_5 - G_4$

.

.

.

$G_{n-1} = G_{n+1} - G_n$

$G_n = G_{n+2} - G_{n+1}$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$G_0 + G_1 + G_2 + \ldots + G_n = G_{n+2} - G_1$$

$$= G_{n+2} - g_1 \qquad \blacksquare$$

Identitas 14 :

$$G_0 + G_2 + G_4 + \ldots + G_{2n} = G_{2n+1} + g_0 - g_1$$ [Dunlap, 2003]

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 3, didapat $G_{n-1} = G_n - G_{n-2}$, sehingga :

$G_0 = G_0$,

$G_2 = G_3 - G_1$,

$G_4 = G_5 - G_3$

$G_6 = G_7 - G_5$

.

.

.

$$G_{2n-2} = G_{2n-1} - G_{2n-3}$$

$$G_{2n} = G_{2n+1} - G_{2n-1}$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$G_0 + G_2 + G_4 + \ldots + G_{2n} = G_{2n+1} - G_1 + G_0$$

$$= G_{2n+1} - G_1 + G_0$$

$$= G_{2n+1} - g_1 + g_0 \qquad \blacksquare$$

Identitas 15 :

$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n} - g_0$$ [Dunlap, 2003]

Bukti :

Dengan menggunakan Definisi 3, didapat $G_{n-1} = G_n - G_{n-2}$, sehingga :

$$G_1 = G_2 - G_0,$$

$$G_3 = G_4 - G_2$$

$$G_5 = G_6 - G_4$$

.

.

.

$$G_{2n-3} = G_{2n-2} - G_{2n-4}$$

$$G_{2n-1} = G_{2n} - G_{2n-2}$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n} - G_0$$
$$= G_{2n} - g_0 \qquad \blacksquare$$

Identitas 16 :

$${G_0}^2 + {G_1}^2 + {G_2}^2 + \ldots + {G_n}^2 = G_n\, G_{n+1} - g_0\,(g_1 - g_0)$$

[Dunlap, 2003]

Bukti :

Bukti dengan menggunakan Induksi Matematika.

Untuk n = 1, maka :

$${G_0}^2 + {G_1}^2 = G_1 G_2 - g_0\,(g_1 - g_0)$$
$${g_0}^2 + {g_1}^2 = g_1 G_2 - g_0\,(g_1 - g_0)$$
$${g_0}^2 + {g_1}^2 = g_1(G_1 + G_0) - g_0\,(g_1 - g_0)$$
$${g_0}^2 + {g_1}^2 = g_1(g_1 + g_0) - g_0\,(g_1 - g_0)$$
$${g_0}^2 + {g_1}^2 = {g_1}^2 + g_1\, g_0 - g_0\, g_1 + {g_0}^2$$
$${g_0}^2 + {g_1}^2 = {g_1}^2 + {g_0}^2$$

Jadi hasil benar untuk n = 1.

Misalkan hasil juga benar untuk n = k :

$${G_0}^2 + {G_1}^2 + {G_2}^2 + \ldots + {G_k}^2 = G_k\, G_{k+1} - g_0\,(g_1 - g_0)$$

Untuk n = k + 1, maka :

$${G_0}^2 + {G_1}^2 + {G_2}^2 + \ldots + {G_{k+1}}^2$$
$$= {G_0}^2 + {G_1}^2 + {G_2}^2 + \ldots + {G_k}^2 + {G_{k+1}}^2$$
$$= G_k\, G_{k+1} - g_0\,(g_1 - g_0) + {G_{k+1}}^2$$
$$= G_{k+1}(G_k + G_{k+1}) - g_0\,(g_1 - g_0)$$
$$= G_{k+1}.G_{k+2} - g_0\,(g_1 - g_0)$$ (Berdasarkan Definisi 3)

$$= G_{(k+1)}.G_{(k+1)+1} - g_0(g_1 - g_0)$$

Sehingga pernyataan juga benar untuk n = k + 1. ■

Identitas 17 :

$$G_{n+1}G_{n-1} = G_n{}^2 + (-1)^n.\{g_1{}^2 - g_1g_0 - g_0{}^2\}$$

[Benjamin et al, 2000]

Bukti :

Bukti dengan menggunakan Induksi Matematika.

Untuk n = 1, maka :

$$G_2.G_0 = G_1{}^2 + (-1)^1.\{g_1{}^2 - g_1g_0 - g_0{}^2\}$$

$$(g_1 + g_0)g_0 = g_1{}^2 - \{g_1{}^2 - g_1g_0 - g_0{}^2\}$$

$$g_1g_0 + g_0{}^2 = g_1g_0 + g_0{}^2$$

Jadi pernyataan benar untuk n = 1.

Misalkan hasil juga benar untuk n = k :

$$G_{k+1}G_{k-1} = G_k{}^2 + (-1)^k.\{g_1{}^2 - g_1g_0 - g_0{}^2\}$$

Untuk n = k + 1, maka :

$$G_{k+1}{}^2 = G_{k+1}.G_{k+1}$$

$$= (G_{k+2} - G_k)G_{k+1}$$ (Berdasarkan Definisi 3)

$$= G_{k+2}.G_{k+1} - G_k.G_{k+1}$$

$$= G_{k+2}(G_k + G_{k-1}) - G_k.G_{k+1}$$ (Berdasarkan Definisi 3)

$$= G_{k+2}.G_k + G_{k+2}.G_{k-1} - G_k.G_{k+1}$$

$$= G_{k+2}.G_k + (G_{k+1} + G_k)G_{k-1} - G_k.G_{k+1}$$ (Berdasarkan Definisi 3)

$$= G_{k+2}.G_k + G_{k+1}G_{k-1} + G_k.G_{k-1} - G_k.G_{k+1}$$

$$= G_{k+2}.G_k + G_{k+1}G_{k-1} + G_k\ (G_{k-1} - G_{k+1})$$

$$= G_{k+2}.G_k + G_{k+1}G_{k-1} + G_k\ (-G_k) \qquad \text{(Berdasarkan Definisi 3)}$$

$$= G_{k+2}.G_k + G_{k+1}G_{k-1} - {G_k}^2$$

Karena $G_{k+1}G_{k-1} = {G_k}^2 + (-1)^k.\{{g_1}^2 - g_1g_0 - {g_0}^2\}$

Maka :

$${G_{k+1}}^2 = G_{k+2}.G_k + (-1)^k.\{{g_1}^2 - g_1g_0 - {g_0}^2\}$$

$$= G_{k+2}.G_k - (-1)^{k+1}.\{{g_1}^2 - g_1g_0 - {g_0}^2\}$$

Didapat :

$$G_{k+2}.G_k = {G_{k+1}}^2 + (-1)^{k+1}.\{{g_1}^2 - g_1g_0 - {g_0}^2\}$$

Sehingga pernyataan juga benar untuk n = k + 1. ■