III. METODE PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini bertempat di Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Lampung pada jenjang program pasca sarjana matematika. Waktu untuk melakukan penelitian ini adalah semester genap tahun akademik 2014-2015.

3.2 Metode Penelitian

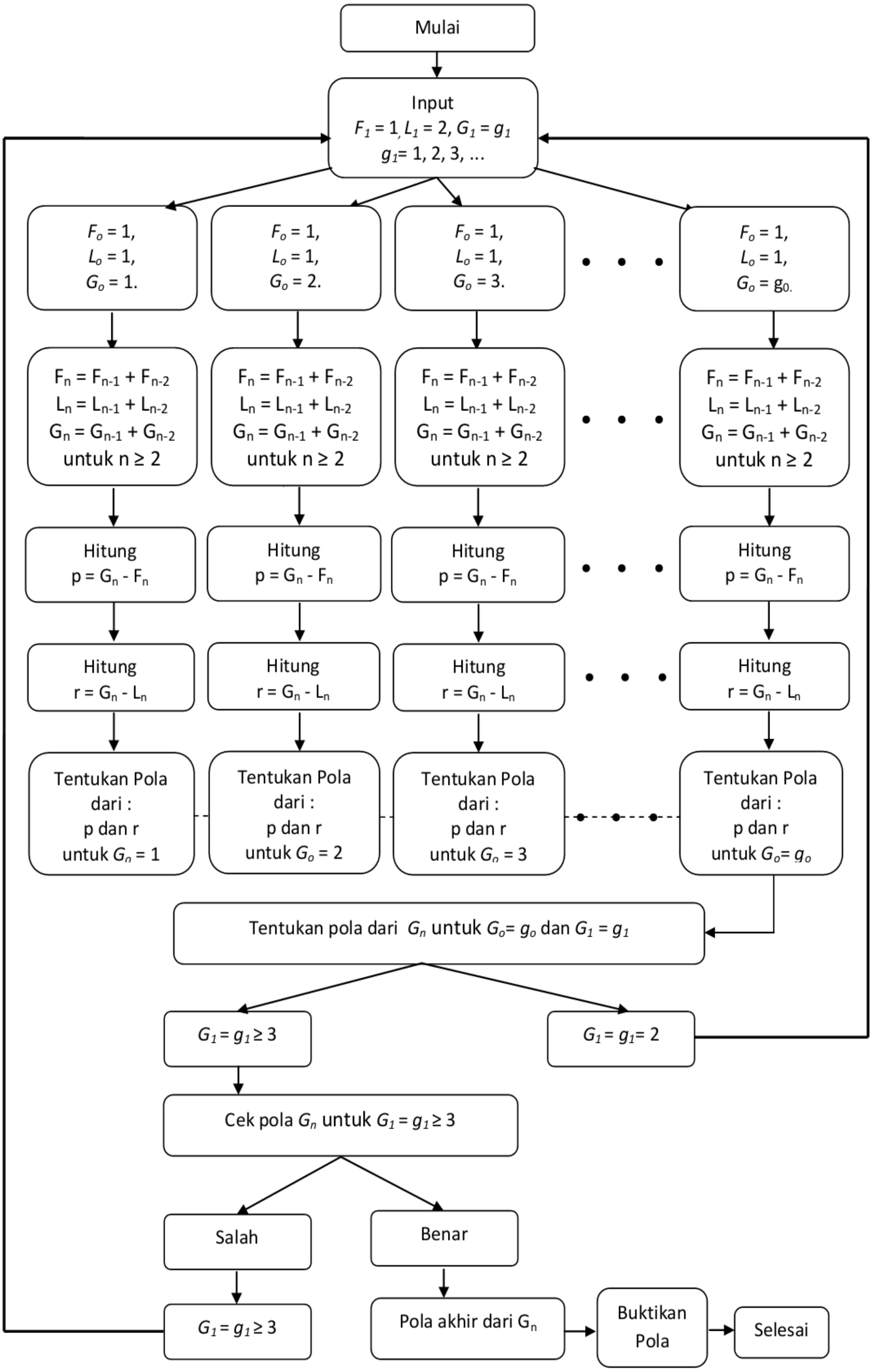
Metode penelitian ini menggunakan studi pustaka. Berikut ini adalah prosedur penelitian ini :

3.2.1 Prosedur Penentuan Identitas Keterkaitan antara Bilangan pada Barisan Gibonacci dengan Bilangan pada Barisan Fibonacci dan Barisan Lucas

1. Tentukan pola keterkaitan antara G_n-F_n dengan F_n dan L_n dengan memberikan nilai $g_0 \geq 1$ dan $g_1 = 1$.
2. Tentukan pola keterkaitan antara G_n-L_n dengan F_n dan L_n dengan memberikan nilai $g_0 \geq 1$ dan $g_1 = 1$.
3. Ulangi prosedur 1 dan prosedur 2 dengan nilai $g_0 \geq 1$ dan $g_1 = 2$.
4. Cek apakah prosedur 1 sampai dengan 3 masih perlu diulangi untuk nilai $g_1 \geq 3$, dan $g_0 \geq 1$. Jika ya, kembali ke langkah 1, jika tidak lanjutkan ke prosedur 5.

5. Berdasarkan pola yang didapat pada prosedur di atas, tentukan pola akhir antara G_n dengan F_n dan L_n.

Prosedur penelitian ini dapat digambarkan dengan diagram alur sebagai berikut :

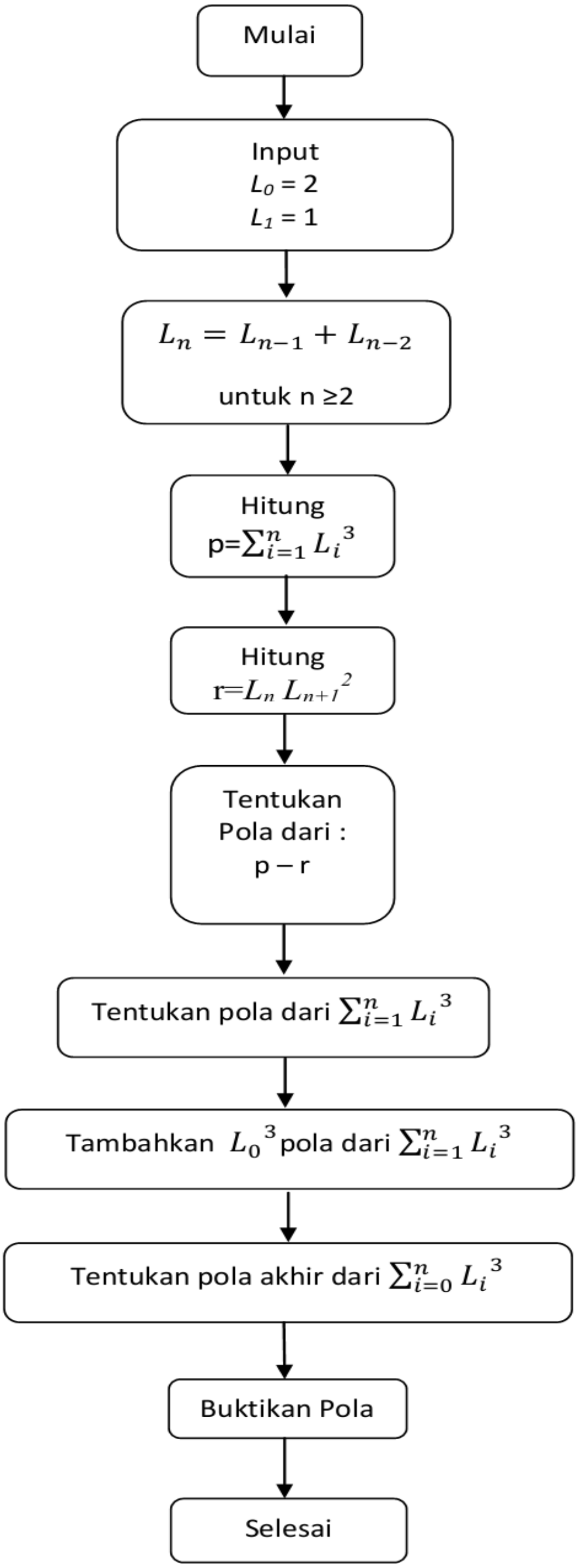


Gambar 2.1. Diagram Alir Penentuan Hubungan F_n, L_n dan G_n

3.2.2 Prosedur Penentuan Identitas Jumlah Kubik dari Bilangan pada Barisan Lucas

1. Untuk sementara, bilangan pertama dari barisan Lucas yaitu L_0 diabaikan.
2. Gunakan pendekatan jumlah kubik pada barisan Fibonacci untuk menemukan pola jumlah kubik dari bilangan pada barisan Lucas yaitu :
   (a) Tentukan hasil dari $L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 + ... + L_n^3$ dan $L_n L_{n+1}^2$ baik untuk n genap maupun n ganjil.
   (b) Tentukan pola dari $(L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 + ... + L_n^3) - (L_n L_{n+1}^2)$
   (c) Tentukan pola dari $L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 + ... + L_n^3$
3. Tambahkan L_0^3 ke pola yang didapat dari $L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 + ... + L_n^3$, sehingga didapat identitas yang sebenarnya.

Prosedur penelitian ini dapat digambarkan dengan diagram alur sebagai berikut :

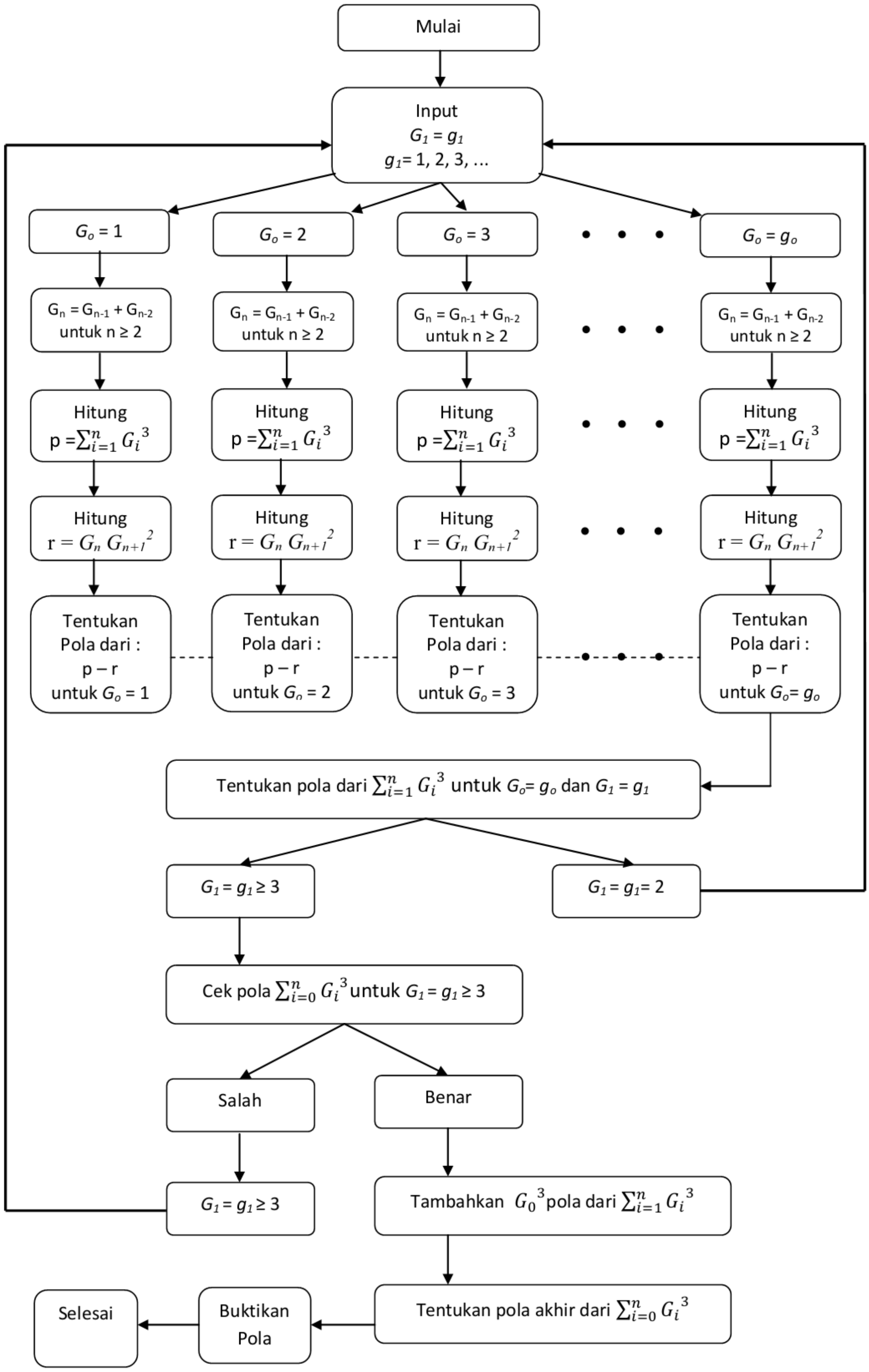


Gambar 2.2. Diagram Alir Penentuan $\sum \boldsymbol{L_n}^{\mathbf{3}}$

3.2.3 Prosedur Penentukan Identitas Jumlah Kubik dari Bilangan pada Barisan Gibonacci

1. Tentukan nilai untuk bilangan kedua dari barisan Gibonacci yaitu $g_1 = 1$, dan $g_0 \geq 1$.
2. Gunakan pendekatan jumlah kubik pada barisan Fibonacci dan Lucas untuk menemukan pola jumlah kubik dari bilangan pada barisan Gibonacci yaitu
   (a) Tentukan hasil dari $G_1^3 + G_2^3 + G_3^3 + ... + G_n^3$ dan $G_n G_{n+1}^2$ baik untuk n genap maupun n ganjil.
   (b) Tentukan pola dari $(G_1^3 + G_2^3 + G_3^3 + ... + G_n^3) – (G_n G_{n+1}^2)$
   (c) Tentukan pola dari $G_1^3 + G_2^3 + G_3^3 + ... + G_n^3$
3. Ulangi prosedur 1 dan 2, dengan memberika nilai $g_1 = 2$, dan $g_0 \geq 1$.
4. Cek apakah prosedur 1 sampai dengan 3 masih perlu diulangi untuk nilai $g_1 \geq 3$, dan $g_0 \geq 1$. Jika ya, kembali ke langkah 1, jika tidak lanjutkan ke prosedur 5.
5. Setelah didapat pola yang baku untuk $G_1^3 + G_2^3 + G_3^3 + ... + G_n^3$, tambahkan G_0^3 ke pola tersebut, sehingga didapat identitas yang sebenarnya.

Prosedur penelitian ini dapat digambarkan dengan diagram alur sebagai berikut :



Gambar 2.3. Diagram Alir Penentuan $\sum \boldsymbol{G_n}^3$

3.3 Beberapa Identitas dan Bukti Pendahuluan

Pada bagian ini akan dibahas beberapa identitas dan bukti pendahuluan yang akan digunakan sebagai dasar untuk pembuktian dalam penelitian ini.

Identitas 18 :

$$2\,F_n{}^2 = F_{n+1}{}^2 - F_n.F_{n-1} - (-1)^n$$

Bukti :

$$F_n{}^2 = F_n.F_n$$

$$= F_n.(F_{n+1} - F_{n-1}) \qquad \text{(Berdasarkan Definisi 1)}$$

$$= F_n.F_{n+1} - F_n.F_{n-1})$$

$$= (F_{n+1} - F_{n-1}).F_{n+1} - F_n.F_{n-1} \qquad \text{(Berdasarkan Definisi 1)}$$

$$= F_{n+1}{}^2 - F_{n+1}.F_{n-1} - F_n.F_{n-1}$$

Berdasarkan Identitas 5 : $F_{n+1}F_{n-1} = F_n{}^2 + (-1)^n$

Maka :

$$F_n{}^2 = F_{n+1}{}^2 - \{\, F_n{}^2 + (-1)^n \,\} - F_n.F_{n-1}$$

$$2\,F_n{}^2 = F_{n+1}{}^2 - F_n.F_{n-1} - (-1)^n \qquad \blacksquare$$

Identitas 19 :

$$F_0{}^3 + F_1{}^3 + F_2{}^3 + \ldots + F_n{}^3 = \frac{F_n\,(F_{n+1})^2 - (-1)^n\,F_{n-1} + 1}{2},$$

Bukti :

$$2F_0{}^3 = 2\,F_0{}^3$$

Dengan menggunakan Identitas 18 : $2\,F_n{}^2 = F_{n+1}{}^2 - F_n.F_{n-1} - (-1)^n$

Maka didapat :

$$2{F_1}^3 = 2\,F_1 \,.{F_1}^2 = F_1 \left({F_2}^2 \; - F_1 . F_0 - (-1)^1 \right) = F_1 \,{F_2}^2 - {F_1}^2 . F_0 + F_1$$

$$2{F_2}^3 = 2\,F_2 \,.{F_2}^2 = F_2 \left({F_3}^2 \; - F_2 . F_1 - (-1)^2 \right) = F_2 \,{F_3}^2 - {F_2}^2 . F_1 - F_2$$

$$2{F_3}^3 = 2\,F_3 \,.{F_3}^2 = F_3 \,({F_4}^2 \; - F_3 . F_2 - (-1)^3 \,) = F_3 \,{F_4}^2 - {F_3}^2 . F_2 + F_3$$

$$2{F_4}^3 = 2\,F_4 \,.{F_4}^2 = F_4 \,({F_5}^2 \; - F_4 . F_3 - (-1)^4 \,) = F_4 \,{F_5}^2 - {F_4}^2 . F_3 - F_4$$

$$2{F_5}^3 = 2\,F_5 \,.{F_5}^2 = F_5 \,({F_6}^2 \; - F_5 . F_4 - (-1)^5 \,) = F_5 \,{F_6}^2 - {F_5}^2 . F_4 + F_5$$

$$2{F_6}^3 = 2\,F_6 \,.{F_6}^2 = F_6 \,({F_7}^2 \; - F_6 . F_5 - (-1)^6 \,) = F_6 \,{F_7}^2 - {F_6}^2 . F_5 - F_6$$

.

.

.

$$2{F_n}^3 = 2\,F_n . {F_n}^2 = F_n \,({F_{n+1}}^2 \; - F_n . F_{n-1} - (-1)^n \,)$$

$$= F_n \,{F_{n+1}}^2 - {F_n}^2 . F_{n-1} - (-1)^n . F_n$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing dijumlahkan secara simultan, akan didapat :

$$2\left({F_0}^3 + \; {F_1}^3 + \; {F_2}^3 + \; \ldots + \; {F_n}^3 \right)$$

$$= 2\,{F_0}^3 - \left({F_1}^2 . F_0\right) + F_1 \, - F_2 \, + F_3 \, - F_4 \, + F_5 \, - F_6 \, + \cdots - (-1)^n F_n \, + F_n \,{F_{n+1}}^2$$

$$= 2.0 - (1.0) + F_1 \, - F_2 \, + F_3 \, - F_4 \, + F_5 \, - F_6 \, + \; \ldots - (-1)^n F_n \, + F_n \,{F_{n+1}}^2$$

$$= F_n \,{F_{n+1}}^2 + F_1 \, - F_2 \, + F_3 \, - F_4 \, + F_5 \, - F_6 \, + \; \ldots - (-1)^n F_n \qquad (1)$$

Selanjutnya, akan didiskusikan $F_1 \, - F_2 \, + F_3 \, - F_4 \, + F_5 \, - F_6 \, + \; \ldots - (-1)^n F_n$

Dengan menggunakan Identitas 2, didapat :

$$-F_2 \, - F_4 \, - F_6 \, + \; \ldots - F_{2n} \; = -(F_{2n+1} - \,1\,) \qquad (2)$$

Sedangkan Identitas 3 yaitu :

$$F_1 \, + F_3 \, + F_5 \;\; \ldots + F_{2n-1} \; = \; F_{2n} \qquad (3)$$

Dari Persamaan (2), jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing ditambah dengan F_{2n} , maka Persamaan (2) menjadi :

$$-F_2 - F_4 - F_6 + \dots - F_{2n} + F_{2n} = -\left(F_{2n+1} - 1\right) + F_{2n} \tag{4}$$

Karena Persamaan (3), maka Persamaan (4) menjadi :

$$-F_2 - F_4 - F_6 + \dots - F_{2n} + (F_1 + F_3 + F_5 \dots + F_{2n-1)} = -F_{2n+1} + 1 + F_{2n}$$

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} = -(F_{2n+1} - F_{2n}) + 1$$

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1 \tag{5}$$

Dari Persamaan (5), jika ruas kiri dan ruas kanan masing-masing ditambah dengan F_{2n+1} , maka didapat :

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} + F_{2n+1}$$
$$= -F_{2n-1} + 1 + F_{2n+1}$$

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} + F_{2n+1}$$
$$= F_{2n+1} - F_{2n-1} + 1$$

Dengan menggunakan Definisi 1, didapat $F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$ sehingga :

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n} + 1 \tag{6}$$

Berdasarkan Persamaan (5) dan Persamaan (6), maka dapat disimpulkan bahwa :

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \dots - (-1)^{\mathrm{n}} F_{\mathrm{n}} = -(-1)^{\mathrm{n}} F_{n-1} + 1 \tag{7}$$

Dengan demikian, karena Persamaan (7), maka Persamaan (1) menjadi :

$$2\left(F_0{}^3 + F_1{}^3 + F_2{}^3 + \dots + F_n{}^3\right)$$
$$= F_n F_{n+1}{}^2 - (-1)^{\mathrm{n}} F_{n-1} + 1$$

Jadi :

$$F_0{}^3 + F_1{}^3 + F_2{}^3 + \dots + F_n{}^3 = \frac{F_n F_{n+1}{}^2 - (-1)^{\mathrm{n}} F_{n-1} + 1}{2} \qquad \blacksquare$$

Identitas 20 :

$$2\,L_n{}^2 = L_{n+1}{}^2 - L_nL_{n-1} + (-1)^n\,.5$$

Bukti :

$$\begin{aligned} L_n{}^2 &= L_n.L_n \\ &= L_n.(L_{n+1} - L_{n-1}) && \text{(Berdasarkan Definisi 2)} \\ &= L_n.L_{n+1} - L_n.L_{n-1}) \\ &= (L_{n+1} - L_{n-1}).L_{n+1} - L_n.L_{n-1} && \text{(Berdasarkan Definisi 2)} \\ &= L_{n+1}{}^2 - L_{n+1}.L_{n-1} - L_n.L_{n-1} \end{aligned}$$

Berdasarkan Identitas 12 : $L_{n+1}L_{n-1} = L_n{}^2 - (-1)^n\,.5$

Maka :

$$L_n{}^2 = L_{n+1}{}^2 - \{\, L_n{}^2 - (-1)^n.5 \,\} - L_n.L_{n-1}$$

$$2\,L_n{}^2 = L_{n+1}{}^2 - L_n.L_{n-1} + (-1)^n\,.5 \qquad \blacksquare$$

Identitas 21 :

$$G_n = g_1\,F_n + g_0\,F_{n-1}$$

Bukti :

Bukti dengan menggunakan Induksi Matematika.

Untuk n = 1, maka :

$$G_1 = g_1\,F_1 + g_0\,F_0$$

$$g_1 = g_1\,.1 + g_0\,.0$$

$$g_1 = g_1$$

Jadi pernyataan benar untuk n = 1.

Misalkan hasil juga benar untuk n = k :

$$G_k = g_1 F_k + g_0 F_{k-1}$$

$$G_{k-1} = g_1 F_{k-1} + g_0 F_{k-2}$$

Untuk n = k + 1, maka :

$$G_{k-1} + G_k = g_1 F_{k-1} + g_0 F_{k-2} + g_1 F_k + g_0 F_{k-1}$$

$$G_{k-1} + G_k = g_1 F_{k-1} + g_1 F_k + g_0 F_{k-2} + g_0 F_{k-1}$$

$$G_{k+1} = g_1 (F_{k-1} + F_k) + g_0 (F_{k-2} + F_{k-1}) \qquad \text{(Berdasarkan Definisi 3)}$$

$$G_{k+1} = g_1 F_{k+1} + g_0 F_k \qquad \text{(Berdasarkan Definisi 1)}$$

Sehingga pernyataan juga benar untuk n = k + 1. ■

Identitas 22 :

$$2\, G_n^{\ 2} = G_{n+1}^{\ \ 2} - G_n G_{n-1} - (-1)^n (g_1^{\ 2} - g_1 g_0 - g_0^{\ 2})$$

Bukti :

$$\begin{aligned} G_n^{\ 2} &= G_n . G_n \\ &= G_n . (G_{n+1} - G_{n-1}) && \text{(Berdasarkan Definisi 3)} \\ &= G_n . G_{n+1} - G_n . G_{n-1}) \\ &= (G_{n+1} - G_{n-1}) . G_{n+1} - G_n . G_{n-1} && \text{(Berdasarkan Definisi 3)} \\ &= G_{n+1}^{\ \ 2} - G_{n+1} . G_{n-1} - G_n . G_{n-1} \end{aligned}$$

Berdasarkan Identitas 17 : $G_{n+1} G_{n-1} = G_n^{\ 2} + (-1)^n . \{g_1^{\ 2} - g_1 g_0 - g_0^{\ 2} \}$

Maka :

$$G_n^{\ 2} = G_{n+1}^{\ \ 2} - \{ G_n^{\ 2} + (-1)^n . (g_1^{\ 2} - g_1 g_0 - g_0^{\ 2})\} - G_n . G_{n-1}$$

$$2\, G_n^{\ 2} = G_{n+1}^{\ \ 2} - G_n . G_{n-1} - (-1)^n . (g_1^{\ 2} - g_1 g_0 - g_0^{\ 2})$$ ■