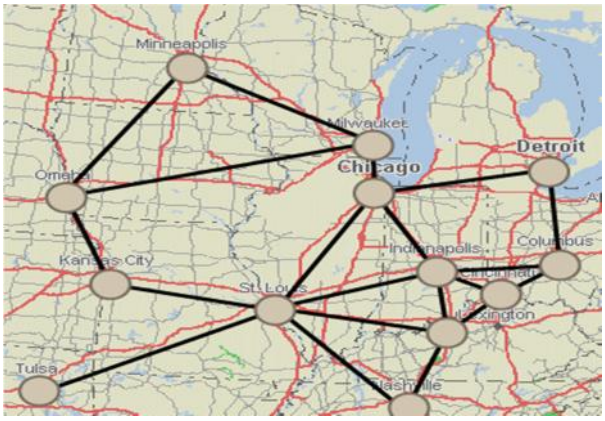
I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep teori graf diperkenalkan pertama kali oleh seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler pada tahun 1736, dalam permasalahan jembatan Konigsberg. Teori graf merupakan salah satu bagian ilmu dari matematika yang semakin lama semakin berkembang. Banyak permasalahan yang dapat dinyatakan dan diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Salah satunya adalah menyelesaikan masalah jalur penerbangan untuk menentukan jalur tercepat .

Jalur tercepat atau terpendek sangat dibutuhkan dalam penerbangan guna efesiensi bahan bakar dan waktu. Pesawat tidak bisa berlama-lama di udara karena bahan bakar pesawat yang terbatas. Jadwal penerbangan juga sudah ditentukan sehingga tidak boleh terjadi keterlambatan penerbangan. Jalur tercepat lebih mengutamakan jarak antara pesawat dengan bandara tujuan. Jalur ini akan membentuk jalur alternatif. Pengambilan jalur terpendek dari bandara asal ke bandara tujuan dapat dilakukan dengan membuat grafik garis, seperti contoh pada Gambar 1. jalur penerbangan bandara Chicago dan bandara-bandara tujuannya.



Gambar 1. Jalur penerbangan bandara Chicago dan bandara-bandara tujuannya

Alternatif yang digunakan dalam menyelesaikan masalah jalur penerbangan tersebut adalah dengan menggunakan graf. Graf merupakan alat bantu untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Pengambilan jalur terpendek dari bandara asal ke bandara tujuan dapat dilakukan dengan membuat grafik garis. Dengan demikian, permasalahan jalur terpendek tersebut dapat direprensentasikan dalam graf, dimisalkan bandara Chicago dan bandara-bandara tujuan sebagai titik (*vertex*) dan jalur penerbangannya dinyatakan sebagai sisi (*edge*).

Dalam permasalahan penerbangan menentukan jalur tercepat dapat menggunakan metode pewarnaan graf. Pewarnaan tersebut berdasarkan perbedaan level ketinggian. Sehingga akan lebih mudah dalam menentukan jalurnya dan semakin mudah untuk dilihat jalur mana yang akan memberikan alternatif terbaik. Salah satu teori graf yang

memiliki kontribusi besar bagi perkembangan ilmu pengetahuan adalah teori pewarnaan lokasi.

Kajian tentang pewarnaan lokasi adalah kajian yang cukup baru dalam teori graf. Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i himpunan titik–titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas – kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $\big(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)\big)$ dengan $d(v, C_1) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaaan-k lokasi (Chartrand, dkk, 2002).

Teori pewarnaan lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. (2002) dengan menentukan lokasi dari beberapa kelas graf sebagai berikut. Untuk lintasan P_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$. Untuk graf siklus diperoleh dua hasil yaitu n ganjil berlaku $\chi_L(C_n) = 3$ dan untuk n genap berlaku $\chi_L(C_n) = 4$. Selanjutnya juga diperoleh $\chi_L(G)$ untuk graf multipartit lengkap dan graf bintang ganda. Pada tahun 2003 Chartrand dkk. membuktikan bahwa bilangan kromatik lokasi graf G dengan orde n yang memuat graf multipartit lengkap berorde $(n-1)$ sebagai subgraf induksinya, berada pada selang $\left[\frac{(n+1)}{2}, n\right]$ dan juga graf-graf yang mempunyai

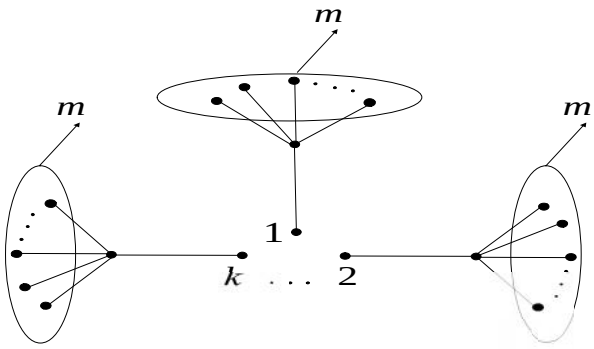
bilangan kromatik lokasi dengan batas atasnya $(n-2)$. Selain itu, Chartrand dkk. (2003) menunjukkan bahwa terdapat pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi k jika dan hanya jika $k \in \{3, 4, \dots, n-2, n\}$.

Selanjutnya beberapa penelitian Asmiati dkk. (2011-2014) juga memberikan pemikiran untuk melatarbelakangi kajian penelitian ini. Pada tahun 2011-2012, Asmiati dkk. berhasil meneliti bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang, bilangan kromatik lokasi kembang api (*firecracker graph)*, karakterisasi graf memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi tiga, dan dimensi partisi graf amalgamasi bintang. Sedangkan pada tahun 2013-2014, Asmiati dkk. berhasil meneliti karakterisasi graf pohon dengan bilangan kromatik lokasi tiga, graf amalgamasi pohon berbilangan kromatik lokasi empat dan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang non homogen. Masalah penentuan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf, masih terbuka untuk dikaji karena belum adanya teorema yang digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada sembarang graf.

Graf amalgamasi bintang $S_{k,m}$ adalah gabungan (amalgamasi) dari graf-graf bintang yang diperoleh dengan mengidentifikasi sebuah daun dari setiap bintang dengan titik hasil identifikasinya disebut pusat amalgamasi. Kajian graf amalgamasi bintang $S_{k,m}$ ini cukup menarik untuk dikaji lebih dalam, maka penulis ingin menentukan bilangan kromatik lokasi grafamalgamasi bintang $nS_{k,m}$. Penelitian ini juga merupakan penelitian lanjutan dari hasil – hasil penelitian Asmiati dkk. (2012).

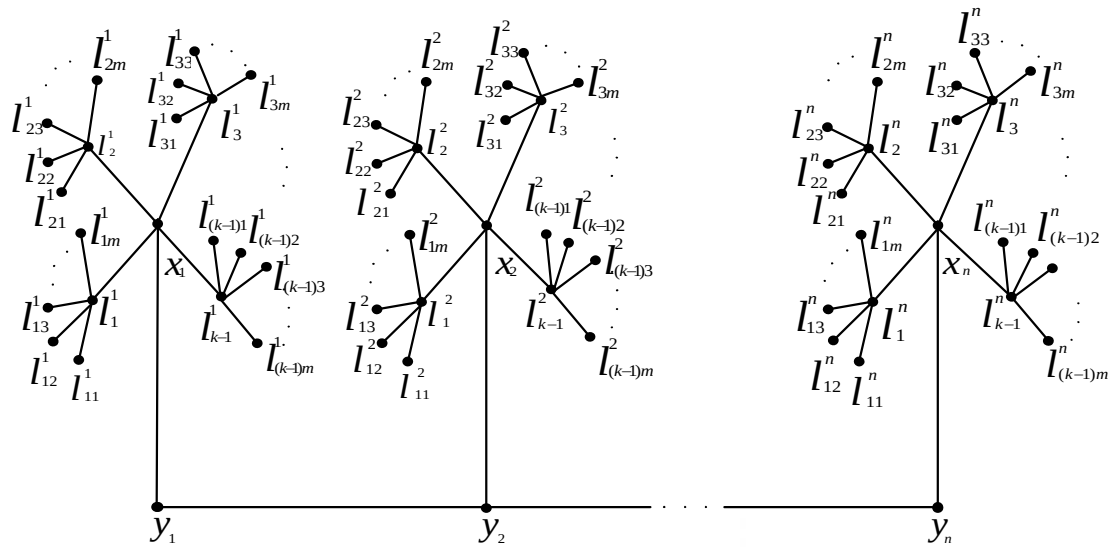
1.2 Perumusan Masalah

Misalkan terdapat k buah graf bintang $K_{1,m_i}, m_i \geq 1,\ i = 1,2,3,\dots,k$ dengan $k,\ m_i$ adalah bilangan bulat. Graf amalgamasi titik bintang $S_{k,(m_1,m_2,\dots,m_k)}$, dari $k \geq 2$, adalah graf yang diperoleh dengan mengidentifikasi sebuah daun dari setiap bintang. Titik hasil identifikasi disebut pusat amalgamasi, dinotasikan x. Titik yang berjarak satu dari pusat amalgamasi disebut titik tengah, dinotasikan $l_i,\ i = 1,2,3,\dots,k-1$ dan titik daun ke- j dari titik tengah l_i adalah l_{ij} , $j = 1,2,3,\dots,m$. Jika $m \geq 1$ untuk semua i, graf amalgamasi bintang dinotasikan sebagai $S_{k,m}$ (Asmiati dkk. (2012)).



Gambar 2. k buah graf bintang K_{1,m_i}

Sedangkan graf $nS_{k,m}$ yang akan dikaji dalam penelitian ini sebagai berikut



Gambar 3. Graf $nS_{k,m}$

Graf $nS_{k,m}$ diperoleh dari n graf $S_{k,m}$ dan setiap titik $y_{1,}y_{2,}y_{3,}, \dots, y_n$ nya dihubungkan oleh suatu lintasan. Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi untuk graf $nS_{k,m}$ untuk n, k, m bilangan asli.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf $nS_{k,m}$ dengan n, k, m sebarang bilangan asli.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengembangkan wawasan tentang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi dari graf amalgamasi bintang $nS_{k,m}$.
2. Memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas dan memperdalam ilmu matematika dalam bidang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi dari graf amalgamasi bintang $nS_{k,m}$.
3. Sebagai bahan kajian untuk referensi penelitian lanjutan mengenai bilangan kromatik lokasi dari suatu graf.