II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dibahas beberapa konsep mendasar meliputi Integral Atas dan Integral Bawah Darboux, Integral Darboux, Teorema Bolzano Weierstrass, serta teorema-teorema yang mendukung penelitian tentang Integral Riemann dan ruang barisan.

2.1 Integral Atas dan Integral Bawah Darboux

Jika diketahui selang $[a, b]$, maka himpunan terurut :

$$P = \{a = x \ \ , x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}$$

dengan $x_{i-1} < x_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$ disebut **partisi** (partition) atau **partisi Riemann pada** $[a, b]$. Selanjutnya, $[x_{i-1}, x_i]$ disebut **selang-bagian** ke-i dan

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

disebut **panjang selang-bagian** ke-i, dan

$$\|P\| = m \qquad \{\Delta_i x \, ; i = 1,2,3, \dots, n\}$$

disebut **norma** (norm) partisi P.

(Walter Rudin, 1976)

Jika P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada $[a, b]$ dan $P_1 \subset P_2$, maka dikatakan partisi P_2 merupakan **penghalus** (refinement) partisi P_1. Partisis pada $[a, b]$ yang paling sederhana (kasar) adalah $\{a = x \ \ , x_1 = b\}$ yang di haluskan oleh partisi pada $[a, b]$ yang lain.

Teorema 2.1.1 *Jika P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada selang $[a, b]$ dan $P_1 \subset P_2$ maka*

$$\|P_2\| \leq \|P_1\|.$$

Bukti : Jika

$$P_2 = \{a = x\ \ , x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}$$

Maka ada bilangan asli k dengan $1 \leq k \leq n$ sehingga

$$\Delta_k x = x_k - x_{k-1} = \|P_2\| = m \qquad \{\Delta_i x\,; i = 1,2,3, \dots, n\}$$

Karena $P_1 \subset P_2$, maka tepat salah satu terjadi :

- $P_1 = P_2$. Dalam keadaan seperti ini diperoleh

$$\|P_2\| = \|P_1\|.$$

- P_1 himpunan-bagian sejati himpunan P_2. Jadi ada $t \in P_2 - P_1$ dan $t \in (x_{j-1}, x_j)$ untuk suatu j. Dalam keadaan ini tentu

$$\|P_2\| \leq \|P_1\|.$$

Dari dua hasil tersebut dapat disimpulkan atau terbukti bahwa

$$\|P_2\| \leq \|P_1\|. \quad \blacksquare$$

Perlu dicatat bahwa, jika P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada selang $[a, b]$, maka untuk setiap $i (i = 1,2)$, selalu berlaku

$$P_1 \cap P_2 \subset P_i \subset P_1 \cup P_2$$

Contoh Soal :

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}, P_2 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

dan

$$P_3 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

masing-masing partisi pada selang [0,1] dengan

$$\|P_1\| = \frac{1}{2}, \|P_2\| = \frac{1}{4}, d \quad \|P_3\| = \frac{1}{4}$$

Mudah dilihat bahwa $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ dan

$$\|P_3\| \leq \|P_2\| \leq \|P_1\|.$$

Jumlah atas dan jumlah bawah

Jika diketahui fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas $P = \{a = x\ \ , x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = b\}$

Partisi pada $[a,b]$, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ titik sebarang dan jika

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

dan

$$M_i = s\quad \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Maka diperoleh

$$m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$$

untuk setiap $i = 1,2,3, \ldots, n$.

Karena fungsi f terbatas pada $[a,b]$, maka ada bilangan m dan M sehingga

$$m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$$

dan

$$M = s\quad \{f(x); x \in [a,b]\}$$

Dan berakibat bilangan m_i dan M_i ada dan selalu berlaku

$$m \leq m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i \leq M$$

Definisi 2.1.2 *Bilangan*

$$\boxed{S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x}$$

Disebut ***jumlah Riemann*** *(Riemann sum) fungsi f pada [a, b], bilangan*

$$\boxed{L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x}$$

Disebut ***jumlah Darboux bawah*** *(lower Darboux sum) fungsi f pada [a, b],dan bilangan*

$$\boxed{U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x}$$

Disebut ***jumlah Darboux atas*** *(upper Darboux sum) fungsi f pada [a, b].*

Di atas telah disebutkan bahwa fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terbatas maka $f(x_i^*), m_i$, dan M_i masing-masing ada (hingga). Hal ini berakibat bilangan-bilangan $S(f;P)$, $L(f;P)$, dan $U(f;P)$ ada untuk setiap partisi P pada $[a, b]$. Oleh karena itu diperoleh teorema di bawah ini.

Teorema 2.1.3. *Jika fungsi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *terbatas, maka untuk setiap partisi P pada* $[a, b]$*, diperoleh*

(i) $\boxed{S(f;P), L(f;P), d \quad U(f;P)}$

Masing-masing ada, dan

(ii) $$\boxed{m(b-a) \leq L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)}$$

dengan

$$\boxed{m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}, d \quad M = s \quad \{f(x); x \in [a,b]\}}$$

Bukti :

Nilai $L(f;P)$ dan $U(f;P)$ masing-masing bergantung pada partisi *P*; tepatnya, setiap partisi *P* pada $[a,b]$ menentukan tepat satu nilai $L(f;P)$ dan tepat satu nilai $U(f;P)$. Sedangkan nilai $S(f;P)$ tidak hanya bergantung pada partisi *P* saja tetapi juga bergantung pada pemilihan titik $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Meskipun demikian apapun pemilihan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, Teorema 2.1.3 tetap berlaku. Sifat lebih lanjut tentang hubungan nilai tiga jenis jumlah, jumlah Riemann dan jumlah Darboux, tersebut di atas tertuang ke dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.1.4. *Jika fungsi* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *terbatas, P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada* $[a,b]$, *dan* $P_1 \subset P_2$, *maka*

$$\boxed{L(f;P_1) \leq L(f;P_2) \leq S(f;P) \leq U(f;P_2) \leq U(f;P_1)}$$

Bukti : Mengingat teorema 2.1.3, akan ditunjukkan

$L(f;P_1) \leq L(f;P_2)$ dan $U(f;P_2) \leq U(f;P_1)$

(i) Katakan $P_1 = \{a = x \ , x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}$. Jika untuk suatu k ada $t_{k0}, t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_k \in P_2$ sehingga

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [t_{k(j-1)}, t_k]\}$$

$$M_k = s \quad \{f(x); x \in [t_{k(j-1)}, t_k]\}$$

dengan $j = 1,2,3,\dots,s$

Mudah difahami bahwa :

$m_k \leq m_k \ \leq M_k \ \leq M_k$ untuk setiap j

$(j = 1,2,3,\dots,s,s+1)$. Diperoleh suku ke- k dari $L(f;P_1)$ terpecah menjadi $(s+1)$ suku dari $L(f;P_2)$, dengan hubungan sebagai berikut :

$$m_k \,.\, \Delta_k x = m_k(\Delta_{k1}t + \Delta_{k2}t + \dots + \Delta_{k(s+1)}t)$$

$$= m_k.\Delta_{k1}t + m_k.\Delta_{k2}t + \dots + m_k.\Delta_{k(s+1)}t)$$

$$\leq m_{k1}.\Delta_{k1}t + m_{k2}.\Delta_{k2}t + \dots + m_{k(s+1)}.\Delta_{k(s+1)}t$$

Dengan

$$\Delta_k \ x = x_k \ - x_{k(j-1)} \qquad j = 1, 2, 3, \dots, s+1$$

Oleh karena itu, dentgan menjumlahkan untuk seluruh k dapat disimpulkan

$$L(f;P_1) \leq L(f;P_2).$$

(ii) Katakan $P_1 = \{a = x \ , x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}$. Jika untuk suatu k ada $t_{k0}, \ t_{k1}, \ t_{k2}, \dots, t_k \ \epsilon \ P_2$ sehingga

$$m_k \ = \inf\{f(x); x \in [t_{k(j-1)}, t_k]\}$$

$$M_k \ = s \ \{f(x); x \in [t_{k(j-1)}, t_k]\}$$

dengan $j = 1,2,3,\dots,s$

Mudah difahami bahwa :

$m_k \leq m_k \ \leq M_k \ \leq M_k$ untuk setiap j

$(j = 1,2,3,\dots,s,s+1)$. Diperoleh suku ke- k dari $L(f;P_1)$ terpecah menjadi $(s+1)$ suku dari $L(f;P_2)$, dengan hubungan sebagai berikut :

$$M_k \ .\Delta_k x = M_k \ (\Delta_{k1}t + \Delta_{k2}t + \dots + \Delta_{k(s+1)}t)$$

$$= M_{k1}.\Delta_{k1}t + M_{k2}.\Delta_{k2}t + \dots + M_{k(s+1)}.\Delta_{k(s+1)}t)$$

$$\leq M_k.\Delta_{k1}t + M_k.\Delta_{k2}t + \dots + M_k.\Delta_{k(s+1)}t$$

Dengan

$$\Delta_k \ x = x_k - x_{k(j-1)} \qquad j = 1, 2, 3, \dots, s+1$$

Oleh karena itu, dengan menjumlahkan untuk seluruh k dapat disimpulkan

$$U(f; P_2) \leq U(f; P_1)$$

Karena terbukti

$L(f; P_1) \leq L(f; P_2)$ dan $U(f; P_2) \leq U(f; P_1)$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$L(f; P_1) \leq L(f; P_2) \leq S(f; P), \leq U(f; P_2) \leq U(f; P_1). \quad \blacksquare$$

Jika $\pi[a, b]$ koleksi semua partisi pada $[a, b]$, didefinisikan dua himpunan bilangan :

$$\mathcal{L}(f) = \{L(f; P) \ ; P \in \pi[a, b]\}$$

$$\mathcal{U}(f) = \{U(f; P) \ ; P \in \pi[a, b]\}$$

dan diperoleh teorema di bawah ini.

Teorema 2.1.5. *Jika fungsi* $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *terbatas maka*

(i) $\mathcal{L}(f)$ *terbatas ke atas dan f dikatakan* ***terintegral Darboux bawah*** *(lower Darboux integrable) pada* $[a, b]$,

(ii) $\mathcal{U}(f)$ *terbatas ke bawah dan f dikatakan* ***terintegral Darboux atas*** *(upper Darboux integrable) pada* $[a, b]$.

Bukti : Karena fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terbatas maka

$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$ dan $M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$ masing-masing ada.

Menurut Teorema 2.1.3. dan Teorema 2.1.4., untuk setiap partisi *P* pada

$[a, b]$ berlaku $L(f; P) \in \mathcal{L}(f)$, $U(f; P) \in \mathcal{U}(f)$ dan

$$m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{L}(f)$ terbatas ke atas dengan salah satu batas atasnya adalah $M(b-a)$, juga $\mathcal{U}(f)$ terbatas ke bawah dengan salah satu batas bawahnya adalah $m(b-a)$. ■

Berdasarkan Teorema 2.1.5. tersebut disusun pengertian-pengertian di bawah ini.

Definisi 2.1.6. *Diketahui fungsi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *terbatas. Bilangan*

(i) $(\underline{D})\int_a^b f = (\underline{D})\int_a^b f\, d \equiv \sup_{P\ [a,b]} \mathcal{L}(f)$ *disebut* ***integral Darboux bawah*** *(lower Darboux integrable) fungsi f pada* $[a, b]$,

(ii) $(\overline{D})\int_a^b f = (\overline{D})\int_a^b f\, d \equiv \inf_{P\ [a,b]} \mathcal{U}(f)$ *disebut* ***integral Darboux atas*** *(upper Darboux integrable) fungsi f pada* $[a, b]$.

(Soeparna Darmawijaya, 2006).

Teorema 2.1.7. *Jika fungsi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *terbatas, maka*

$$(\underline{D})\int_a^b f \leq (\overline{D})\int_a^b f \ .$$

Bukti : Karena fungsi f terbatas, maka menurut Teorema 2.1.5., $(\underline{D})\int_a^b f$ dan $(\overline{D})\int_a^b f$ ada. Oleh karena itu, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P_1 dan P_2 pada selang $[a, b]$ sehingga berlaku

$$(\underline{D})\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f; P_1)$$

dan

$$U(f; P_2) < (\overline{D})\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(A)}$$

Karena $P = P_1 \cup P_2$ partisi pada $[a, b]$ dan $P_i \subset P(i = 1,2)$, maka diperoleh

$$L(f; P_1) \leq L(f; P) \leq U(f; P) \leq U(f; P_2) \qquad \text{(B)}$$

Dari (A) dan (B) diperoleh

$$(\underline{D})\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f; P) \leq U(f; P) < (\overline{D})\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

yang berarti

$$(\underline{D})\int_a^b f \leq (\overline{D})\int_a^b f . \quad \blacksquare$$

2.2 Integral Darboux

Telah diperlihatkan bahwa setiap fungsi *f* yang terbatas pada suatu selang $[a, b]$ tentu terintegral Darboux atas dan terintegral Darboux bawah pada $[a, b]$ dan selalu berlaku $(\underline{D})\int_a^b f \leq (\overline{D})\int_a^b f$.

Definisi 2.2.1. *Diketahui fungsi f terbatas pada* $[a, b]$. *Jika* $(\underline{D})\int_a^b f = (\overline{D})\int_a^b f$, *maka dikatakan f* ***terintegral Darboux*** *(Darboux Integrable) pada* $[a, b]$ *dan bilangan*

$$\boxed{(D)\int_a^b f = (\underline{D})\int_a^b f = (\overline{D})\int_a^b f.}$$

disebut ***Intgral Darboux*** *fungsi f pada* $[a, b]$.

Teorema di bawah ini merupakan salah satu kriteria apakah suatu fungsi terintegral Darboux atau tidak.
(Soeparna Darmawijaya, 2006).

Teorema 2.2.2. *Fungsi f yang terbatas pada* $[a, b]$ *terintegral Darboux pada* $[a, b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapatr partisi P pada* $[a, b]$ *sehingga berlaku*

$$\boxed{U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon}$$

Bukti : Syarat perlu : Diketahui Fungsi f terintegral Darboux pada $[a, b]$, jadi

$$(D)\int_a^b f = (\underline{D})\int_a^b f = (\overline{D})\int_a^b f.$$

Oleh karena itu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ sehingga berlaku

$$(D)\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = (\underline{D})\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;P_1)$$

dan

$$U(f;P_2) < (\overline{D})\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} = (D)\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(A)}$$

Karena $P = P_1 \cup P_2$ merupakan partisi pada $[a,b]$ dan $P_i \subset P(i = 1,2)$, maka diperoleh

$$L(f;P_1) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq U(f;P_2) \qquad \text{(B)}$$

Dari (A) dan (B) diperoleh

$$(\underline{D})\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;P) \leq U(f;P) < (\overline{D})\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

yang berakibat

$$U(f;P) - L(f;P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Syarat cukup : Diketahui bahwa untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a,b]$ sehingga

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon.$$

Telah diketahui dari Definisi 2.1.6. dan Teorema 2.1.7., selalu berlaku

$$L(f;P) \leq (\underline{D})\int_a^b f \leq (\overline{D})\int_a^b f \leq U(f;P)$$

Dua ketidaksamaan terakhir berakibat

$$0 \leq (\overline{D})\int_a^b f - (\underline{D})\int_a^b f < \varepsilon$$

untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, yang berarti

$$(\underline{D})\int_a^b f = (\overline{D})\int_a^b f. \quad \blacksquare$$

Berberapa fungsi yang terintegral Darboux

Tiga teorema di bawah ini memperlihatkan tiga contoh penting fungsi-fungsi yang terintegral Darboux pada selang tertutup $[a, b]$.

Teorema 2.2.3.

(i) Setiap fungsi konstan terintegral Darboux. Lebih tegas, jika $f(x) = k$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka f terintegral Darboux pada $[a, b]$, dan

$$(D)\int_a^b f = k(b - a)$$

(ii) Setiap fungsi monoton dan terbatas pada suatu selang tertutup terintegral Darboux

Bukti : (i) Diambil sebarang bilanga $\varepsilon > 0$ dan sebarang partisi $P = \{a = x\ , x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}$. Karena $f(x) = k$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka deperoleh $m_i = k$ dan $M_i = k$, untuk setiap i, $i = 1,2,3, \dots, n$. Oleh karena itu diperoleh

$$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta_i x = k(b-a)$$

dan

$$U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta_i x = k(b-a)$$

yang berakibat $U(f;P) - L(f;P) = 0 < \varepsilon$ atau menurut Teorema 2.2.2., fungsi f terintegral darboux pada $[a,b]$ dan

$$(D)\int_a^b f = \sup \mathcal{L}(f) = \sup \{k(b-a)\} = k(b-a)$$

atau

$$(D)\int_a^b f = \inf \mathcal{U}(f) = \inf \{k(b-a)\} = k(b-a)$$

(ii). Diambil sebarang fungsi g yang monoton dan terbatas. Jika g fungsi konstan sudah terbukti. Jika g fungsi naik monoton pada $[a,b]$, untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ yang diambil lebih dahulu, dibentuk partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$. Karena fungsi g naik monoton, maka $m_i = g(x_{i-1})$ dan $M_i = g(x_i)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} U(g;P) - L(g;P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta_i x \\ &< \sum_{i=1}^{n} \{g(x_i) - g(x_{i-1})\} \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \sum_{i=1}^{n} \{g(x_i) - g(x_{i-1})\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \{g(x_n) - g(x_0)\} = \varepsilon$$

yang berarti, menurut Teorema 2.2.2., fungsi naik monoton dan terbatas f terintegral darboux pada $[a, b]$. Bukti sejalan untuk fungsi turun monoton dan terbatas. ■

Teorema 2.2.4. *Setiap fungsi kontinu pada suatu selang tertutup terintegral Darboux pada selang itu.*

Bukti : Diketahui fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$. fungsi f kontinu seragam pada $[a, b]$ yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ yang tak bergantung pada $x \in [a, b]$ sehingga untuk setiap $u, v \in [a, b]$ dengan $|u - v| < \delta$ berakibat

(A) $$|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Diambil sebarang partisi $P = \{a = x\ , x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b\}$ pada $[a, b]$ dengan $||P|| < \delta$. Jadi, $\Delta_i x < \delta$ untuk setiap i, $i = 1,2,3, \dots, n$. Karena fungsi f kontinu pada setiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, dan terdapat $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga $m_i = g(x_i')$ dan $M_i = g(x_i'')$. Karena $|x_i'' - x_i'| \leq \Delta_i x < \delta$, maka menurut A, berlaku

(B) $$|f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Untuk setiap i. Oleh karena itu, diperoleh

$$U(f; P) - L(f; P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta_i x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{f(x''_i) - f(x'_i)\} \Delta_i x$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) < \varepsilon$$

yang berarti terbukti bahwa fungsi f terintegral Darboux pada s it . ■

Teorema 2.2.5. *Setiap fungsi yang terbatas dan kontinu pada suatu selang tertutup kecuali di beberapa titik, terintegral Darboux pada selang tertutup itu.*

Bukti : Diambil sebarang fungsi terbatas f yang kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ kecuali di titik $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \epsilon\ [a,b]$. Tak mengurangi arti jika dianggap $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$. Karena fungsi f terbatas pada $[a,b]$, maka

$$m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}, d \quad M = s \ \{f(x); x \in [a,b]\}$$

Ada. Untuk bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang diambil bilangan positif h dengan $0 < h < \frac{1}{2}\cdot\min\{a_i - a_{i-1}; i = 1,2,\dots,k\}$. Menurut Teorema 2.2.3., karena fungsi f kontinu pada selang-selang $I_1 = [a, a_1 - h], I_2 = [a_1 + h, a_2 - h], I_3 = [a_2 + h, a_3 - h], \dots, I_{k+1} = [a_k + h, b]$ tentu ada partisi $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{k+1}$ berturut-turut pada selang tersebut sehingga

$$U(f; P_i) - L(f; P_i) < \frac{\varepsilon}{2(k+1)}$$

Untuk setiap $i(\ i = 1,2,3,\dots,k+1)$. Bentuk partisi $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_{k+1}$. Jelas bahwa P partisi pada $[a,b]$. Jika

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [a_i - h, a_i + h]\},$$

dan

$$M_i = s\ \ p\{f(x); x \square [a_i - h, a_i + h]\},$$

maka diperoleh

$$U(f;P) - L(f;P) = \sum_{i=1}^{k+1}\{U(f;P_i) - L(f;P_i)\} + \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)\,2h$$

$$< \sum_{i=1}^{k+1}\frac{\varepsilon}{2(k+1)}(M-m)\sum_{i=1}^{k}2h$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + (M-m)2kh \ < \varepsilon$$

asalkan $h < \frac{\varepsilon}{4k(M+m)}$. Dengan kata lain, dapat dikonstruksikan partisi $P = P_1 \square P_2 \square P_3 \square \ldots \square P_{k+1}$ pada $[a,b]$ sengingga berakibat

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$$

yang berarti terbukti bahwa fungsi *f* terintegral Darboux pada $[a,b]$. ■

Akibat 2.2.6. *Jika fungsi f terbatas dan* $f(x) = 0$ *untuk setiap* x $[a,b]$ *kecuali di beberapa titik, maka fungsi f terintegral Darboux pada* $[a,b]$ *dan*

$$(D)\int_a^b f = 0$$

Dengan menggunakan tiga teorema di atas, banyak jenis fungsi dengan secara mudah dapat ditentukan apakah fungsi itu terintegral Darboux pada selang tertutup $[a,b]$ atau tidak.

2.3 Teorema Bolzano Weierstrass

Sebelum membahas tentang Teorema Bolzano Weierstrass, ada baiknya terlebih dahulu dibahas beberapa teorema di bawah ini yang merupakan landasan dasar dari Teorema Bolzano Weierstrass.

Teorema 2.3.1. ***(Barisan Monoton)***

Barisan monoton $\{a_n\}$ konvergan jika dan hanya jika $\{a_n\}$ terbatas. Lebih lanjut

(i) Jika $\{a_n\}$ naik monoton dan terbatas ke atas, maka

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \sup\{a_n; n = 1,2,3,\ldots\}$$

(ii) Jika $\{a_n\}$ turun monoton dan terbatas ke bawah, maka

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \inf\{a_n; n = 1,2,3,\ldots\}$$

Bukti :

(i) Diambil sebarang barisan monoton $\{a_n\}$. Jika $\{a_n\}$ konvergan, maka ada bilangan a sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a \quad a \quad ,$$

Jadi $\{a_n\}$ tetbatas. Sebaliknya, jika $\{a_n\}$ terbatas ke atas, sebut M sebagai supremanya,

$$M = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$$

Maka untuk setiap bilangan nyata $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 sehingga

$$M - \varepsilon < a_{n_0} \qquad \text{(A)}$$

Karena $\{a_n\}$ naik monoton dan terbatas ke atas, maka

$$a_n \leq a_{n+1} \leq M \tag{B}$$

untuk setiap bilangan asli n. Dari hasil (A) dan (B) diperoleh, untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$M - \varepsilon < a_{n_0} \leq M < M + \varepsilon$$

atau

$$|a_n - M| < \varepsilon.$$

Dengan kata lain terbukti bahwa

$$\lim_{n \to \infty} a_n = M = \sup\{a_n; n = 1,2,3, \dots\}$$

(ii) Diambil sebarang barisan monoton $\{a_n\}$. Jika $\{a_n\}$ konvergan, maka ada bilangan a sehingga

$$\lim_{n \to \infty} \{a_n\} = a \quad a \quad ,$$

Jadi $\{a_n\}$ tetbatas. Sebaliknya, jika $\{a_n\}$ terbatas ke atas, sebut m sebagai infimanya,

$$m = \inf\{a_1, a_2, \dots\}$$

Maka untuk setiap bilangan nyata $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 sehingga

$$m - \varepsilon < a_{n_0} \tag{A}$$

Karena $\{a_n\}$ naik monoton dan terbatas ke atas, maka

$$a_n \leq a_{n+1} \leq m \tag{B}$$

untuk setiap bilangan asli n. Dari hasil (A) dan (B) diperoleh, untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$m - \varepsilon \leq a_{n_0} < m < m + \varepsilon$$

atau

$$|a_n - m| < \varepsilon.$$

Dengan kata lain terbukti bahwa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = m = \inf\{a_n; n = 1,2,3,\ldots\}$$

Jadi terbukti bahwa barisan monoton $\{a_n\}$ konvergan jika dan hanya jika $\{a_n\}$ terbatas. ■

Teorema 2.3.2. ***(Teorema Selang Susut)***

Jika barisan selang tertutup $\{[a_n, b_n]\}$ mempunyai sifat-sifat

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \square [a_n, b_n]$ *untuk setiap $n \in \mathcal{N}$*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

Maka terdapat satu bilangan nyata $x_0 \in [a_n, b_n]$ untuk setiap $n \in \mathcal{N}$

Bukti :

Karena $[a_{n+1}, b_{n+1}] \square [a_n, b_n]$ untuk setiap bilangan asli n diperoleh barisan $\{a_n\}$ naik monoton dan terbatas ke atas dan barisan $\{b_n\}$ turun monoton dan terbatas ke bawah.

Menurut Teorema 3.3.1., $\{a_n\}$ konvergan ke supremanya dan $\{b_n\}$ konvergen ke infimanya. jadi

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dan $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

dengan $a = \sup\{a_n ;\ n = 1,2,3,\ldots\}$ dan $b = \inf\{b_n ;\ n = 1,2,3,\ldots\}$. Tepat salah satu pernyataan berikut benar : $a = b$, $a < b$, atau $a > b$.

- Untuk $a < b$ tidak mungkin, sebab jika $a < b$, maka mengingat syarat (ii) diperoleh suatu kontradiksi :

$$0 < b - a = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

- Untuk $a > b$ juga tidak mungkin, sebab jika $a > b$, maka mengingat syarat (ii) diperoleh suatu kontradiksi pula, yaitu :

$$0 < a - b = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

- Sehingga pernyataan $a = b$ yang paling tepat.

Diambil $x_0 = a = b$. Tinggal memperlihatkan $x_0 \in [a_n, b_n]$ untuk setiap n. Karena $x_0 = b = i\imath$ $\{b_n ;\ n = 1,2,3,\ldots\}$ diperoleh $x_0 < b_n$ untuk setiap bilangan asli n. Karena $x_0 = a = s$ $\{a_n ;\ n = 1,2,3,\ldots\}$ diperoleh $a_n < x_0$ untuk setiap bilangan asli n. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $a_n < x_0 < b_n$ atau $x_0 \in [a_n, b_n]$ untuk setiap bilangan asli n. Ketunggalan x_0 cukup jelas karena ketunggalan a atau ketunggalan b. ■

Teorema 2.3.3. *Setiap barisan bilangan nyata paling sedikit mmpunyai satu barisan-bagian yang monoton.*

Bukti : Diambil sebarang bilangan nyata $\{a_n\}$. Terdapat tiga kemungkinan, paling sedikit salah satu terjadi, yaitu :

(i) Untuk setiap $k \in \mathcal{N}$ ada $n_k \in \mathcal{N}$ sehingga $k < n_k$ dan $a_k = a_{n_k}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\{a_{n_k}\}$ □ $\{a_n\}$ yang konstan. Jadi $\{a_{n_k}\}$ b m .

(ii) Untuk setiap $k \in \mathcal{N}$ ada $n_k \in \mathcal{N}$ sehingga $k < n_k$ dan $a_k < a_{n_k}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\{a_{n_k}\}$ □ $\{a_n\}$ yang naik monoton.

(iii) Untuk setiap $k \in \mathcal{N}$ ada $n_k \in \mathcal{N}$ sehingga $k < n_k$ dan $a_k > a_{n_k}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\{a_{n_k}\}$ □ $\{a_n\}$ yang turun monoton.

Bukti selesai. ■

Teorema 2.3.4. ***(Teorema Bolzano Weierstrass)***

Setiap barisan bilangan nyata yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen.

Bukti :

Diambil sebarang barisan $\{a_n\}$ yang terbatas. Menurut Teorema 2.3.3., $\{a_n\}$ mempunyai barisan $\{a_{n_k}\}$ bagian yang monoton. Jadi $\{a_{n_k}\}$ barisan yang monoton terbatas. Oleh karena itu, menurut Teorema 2.3.1., $\{a_{n_k}\}$ konvergen. ■

Teorema Bolzano Weierstrass dapat juga dibuktikan dengan menggunakan Teorema Selang Susut (Teorema 2.3.2.). Teorema Bolzano Weierstrass mengatakan bahwa jika $\{a_n\}$ barisan yang terbatas, maka setiap barisan bagiannya yang konvergen tidak perlu mempunyai limit yang sama. Tetapi jika setiap barisan bagiannya yang konvergen itu mempunyai limit yang sama, maka barisan aslinya akan konvergen ke limit itu pula.

2.4 Integral Reimann

Telah diketahui bahwa jika fungsi $f : [a, b] \rightarrow R$ terbatas dan P partisi pada $[a, b]$, maka berakibat

$$L(f; P) \leq S(f; P) \leq U(f; P) \tag{2.1.1}$$

G.F.B. Riemann menggunakan $S(f; P)$ untuk menyusun integralnya.

(Walter Rudin, 1976)

Definisi 2.4.1. ***(Integral Riemann)***

*Fungsi $f : [a, b] \rightarrow R$ dikatakan **terintegral Riemann** (Riemann Integrable) pada $[a, b]$ jika ada bilangan A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ partisi pada $[a, b]$ dengan $||P|| < \delta$ berakibat*

$$|A - S(f; P)| = \left| A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta_i x \right|$$

A *disebut **nilai integral Riemann** fungsi f pada* $[a, b]$.

(Soeparna Darmawijaya, 2006).

Perlu diingat bahwa pengambilan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ sebarang dan $||P|| = m \{\Delta_i x; = 1, 2, \ldots, n\}$. Selanjutnya, menurut Definisi 2.4.1., fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (S; P) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum f(x_i^*) \Delta_i x = A$$

Teorema 2.4.2. *Jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka nilai integralnya tunggal*

Bukti : Jika A_1 dan A_2 nilai integral Riemann fungsi f pada $[a, b]$, maka untuk sebarang bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat bilangan $\delta_1 < 0$ dan $\delta_2 < 0$ sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = 6\}$ dan $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ partisi pada $[a, b]$ dengan $\| P_1 \| < \delta_1$ dan $\| P_2 \| < \delta_2$, berturut - turut berakibat

$$\left| A_1 - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{*})\Delta_i x \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dan } \left| A_2 - \sum_{k=1}^{m} f(y_k^{*})\Delta_k y \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Diambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, partisi $P = \{a = z_0, z_1, \ldots, z_n = b\}$ dengan $\| P \| < \delta$ dan $z_i^{*} \in [z_{i-1}, z_i]$. Karena $\| P \| < \delta_i$ (i = 1, 2), maka diperoleh

$$|A_1 - A_2| \leq \left| A_1 - \sum_{i=1}^{s} f(x_i^{*})\Delta_i z \right| + \left| \sum_{i=1}^{s} f(x_i^{*})\Delta_i z - A_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

yang berarti $A_1 = A_2$ dan bukti selesai. ■

Menurut Definisi 2.4.1. dan Teorema 2.4.2., jika fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ dengan nilai integral Riemannnya A, yang biasa ditulis dengan

$$\boxed{A = (R)\int_a^b f = (R)\int_a^b f(x)\, d\ ,}$$

tunggal.

Teorema 2.4.3. *Jika fungsi* $f : [a, b] \to R$ *terintegral Riemann pada* $[a, b]$, *maka* f *terbatas pada* $[a, b]$.

Bukti : Andaikan fungsi f tak terbatas ke atas pada $[a, b]$, maka untuk setiap bilangan asli n terdapat $t_n \in [a, b]$ sehingga

$$f(t_n) > n.$$

Untuk setiap partisi $P = \{ a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \}$, tentu $t_n \in [x_{k-1}, x_k]$ untuk suatu k dan oleh karena itu himpunan

$$S(f) = \{S(f; P); P \in \pi[a, b]\}$$

tak terbatas ke atas sebab x_k^* dapat dipilih sama dengan t_n jika $t_n \in [x_{k-1}, x_k]$.

Hal ini berarti

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f; P) = +\infty$$

(tak ada) yang dengan kata lain fungsi f tak terintegral Riemann pada $[a, b]$.

Bukti sejalan, apabila diandaikan f tak terbatas ke bawah. ■

Teorema 2.4.4. ***(Kriteria Chaucy)***

Diketahui fungsi $f : [a, b] \to R$ *terbatas. Fungsi* f *terintegral Riemann pada* $[a, b]$, *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan* $\delta > 0$ *sehingga jika* P_1 *dan* P_2 *partisi pada* $[a, b]$ *dengan* $\| P_1 \| < \delta$ *dan* $\| P_2 \| < \delta$ *berakibat*

$$\boxed{|S(f; P_1) - S(f; P_2)| < \varepsilon.}$$

Bukti : Syarat perlu : Jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka ada bilangan A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi pada $[a, b]$ dengan $\| P \| < \delta$ berakibat

$$|S\,(f; P) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil sebarang dua partisi P_1 dan P_2 pada $[a, b]$ dengan $\| P_1 \| < \delta$ dan $\| P_2 \| < \delta$ berakibat

$$|S\,(f; P_1) - S\,(f; P_2)| \le |S\,(f; P_1) - A| + |A - S\,(f; P_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Syarat cukup : Menurut yang diketahui untuk bilangan 1 terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada $[a, b]$ dengan $\| P_1 \| < \delta$ dan $\| P_2 \| < \delta$ berakibat

$$|S\,(f; P_1) - S\,(f; P_2)| < 1.$$

Tulis π sebagai koleksi semua partisis P pada $[a, b]$ dengan

$$\|P\| < \delta$$

untuk setiap $P \in \pi$. Diampil $P_0 \in \pi$ tetap; untuk setiap $P \in \pi$ **diperoleh**

$$|S\,(f; P_1) - S\,(f; P_2)| < 1$$

atau

$$S(f; P_0) - 1 < S(f; P) < S(f; P_0) + 1$$

Jadi, himpunan bilangan nyata

$$S(f) = \{S(f; P); P \in \pi\}$$

terbatas. Jika anggota $S(f)$ banyaknya hingga, maka f merupakan fungsi tangga dan oleh karena itu f terintegral Riemann pada $[a, b]$. Jika fungsi f bukan fungsi

tangga, maka $S(f)$ merupakan himpunan bilangan terbatas yang banyak anggotanya tak hingga. Menurut Teorema 2.3.4. (Teorema Bolzano-Weierstrass) , $S(f)$ mempunyai paling sedikit satu titik limit, namakan titik limit itu *A*.
Hal ini berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $P_0 \in \pi,\ S(f;P) \in S(f)$, sehingga

$$|A - S\,(f;P)| < \varepsilon$$

Dengan kata lain terbukti fungsi *f* terintegral Riemann pada $[a,b]$. ■

Teorema 2.4.3. mengatakan bahwa setiap fungsi yang tak terbatas pada suatu selang tertutup tak akan terintegral Riemann pada selang itu. Teorema di bawah ini akan menunjukan ekuivalensi antara Integral Riemann dan Integral Darboux.

Teorema 2.4.5. *Fungsi f terintegral Riemann jika dan hanya jika f terintegral Bardoux pada selang tertutup yang sama. Lebih lanjut*

$$\boxed{(R)\int_a^b f = (D)\int_a^b f}$$

Bukti : Syarat perlu : Jika fungsi *f* terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka *f* ada bilangan $A = (R)\int_a^b f$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika dan $P = \{\, a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \,\}$ partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$|A - S(f;P)| = \left|A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

atau

$$A - \frac{\varepsilon}{3} < S(f;P) < A + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Perlu diingat bahwa pemilihan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ sebarang. Karena

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

dan

$$M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

ada, maka untuk setiap $i(i = 1, 2, \dots, n)$ dapat dipilih $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga

$$f(x_i') - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < m_i \text{ dan } M_i < f(x_i'') - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Setelah dikalikan dengan $\Delta_i x$ kemudian dijumlahkan, diperoleh

$$S(f;P) - \frac{\varepsilon}{3} < L(f;P) \text{ dan } U(f;P) \leq S(f;P) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Oleh karena itu

$$S(f;P) - \frac{\varepsilon}{3} \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq S(f;P) + \frac{\varepsilon}{3}$$

yang berakibat

$$U(f;P) - L(f;P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

atau fungsi *f* terintegral Darboux pada [*a*, *b*].

Syarat cukup : Karena *f* terintegral Darboux pada selang $[a, b]$, maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisis P pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon.$$

Tetapi telah diketahui bahwa

$$L(f;P) \leq (D)\int_a^b f \leq U(f;P) \text{ dan } L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P)$$

Berdasrkan tiga ketidaksamaan terakhir, dapat disimpulkan bahwa

$$\left|(D)\int_a^b f - S(f;P)\right| < \varepsilon$$

yang berarti bahwa fungsi *f* terintegral Riemann pada $[a, b]$ dan

$(R) \int_a^b f = A = (D) \int_a^b f.$ ■

Setelah diketahui adanya ekuivalensi antara integral Riemann dan integral Bardoux, akan diselidiki sifat-sifat lebih lanjut. Untuk menyingkat penulisan perlu diadakan kesepakatan bersama bahwa, jika tak ada kerancuan atau maksud tertentu, untuk selanjutnya yang dimaksud dengan perkataan **fungsi yang terintegral** adalah fungsi yang terintegral Riemann atau fungsi yang terintegral Bardoux dan

$$\int_a^b f = (D) \int_a^b f = (R) \int_a^b f$$

Himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann atau terintegral Bardoux pada selang tertutup [*a, b*] berturut-turut ditulis dengan

$$R[a, b] \;\; d \qquad D[a, b].$$

Jadi, jika *f* terintegral pada [*a, b*] ditulis dengan

$$f \;\square\; R[a, b] \;\; d \qquad f \;\square\; D[a, b].$$

dan untuk lebih menyingkat nilai integralnya ditulis dengan $\int_a^b f = \int_a^b f\,(t)d$.

Jadi,

$$\int_a^b f\,(t)d = \int_a^b f = (R) \int_a^b f = (D) \int_a^b f$$

Mudah difahami bahwa untuk setiap partisi $P = \{ a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \}$ pada $[a,b], f, g \in R[a,b]$, sebarang konstanta $\alpha (\alpha \in R)$, d $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap i, selalu berlaku :

1. $S(\alpha\ ; P) = \alpha.(f; P)$
2. $S(f; P) + S(g; P) = S(f+g; P)$
3. $L(\alpha\ ; P) = \alpha.L(f; P)$ asalkan $\alpha > 0$
4. $U(\alpha\ ; P) = \alpha.U(f; P)$ asalkan $\alpha > 0$
5. $L(\alpha\ ; P) = \alpha.U(f; P)$ asalkan $\alpha < 0$
6. $U(\alpha\ ; P) = \alpha.L(f; P)$ asalkan $\alpha < 0$
7. $L(f; P) + L(g; P) = L(f+g; P)$
8. $U(f+g; P) \leq U(f; P) + U(g; P)$

Teorema 2.4.6. $R[a,b]$ *merupakan ruang linier, i, e., untuk setiap* $\alpha \in R$ d $f, g \in R[a,b]$ *berakibat* α , $f + g \in R[a,b]$. *Lebih lanjut*

i. $\int_a^b \alpha.f = \alpha.\int_a^b f$

ii. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Bukti : Karena $f, g \in R[a,b]$, maka menurut Teorema 2.4.3., fungsi f dan fungsi g masing-masing terbatas pada $[a,b]$. Namakan

$$M_f = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\}, M_g = \sup\{|g(x)|; x \in [a,b]\}$$

dan

$$M = m \quad \{|\alpha|, M_f, M_g, 1\}$$

Karena $f, g \in R[a, b]$, maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$\left|\int_a^b f - S(f; P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1}\ d \qquad \left|\int_a^b g - S(f; P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Selanjutnya, diperoleh

(i). $\left|\alpha \int_a^b f - S(\alpha\ ; P)\right| = \left|\alpha \int_a^b f - \alpha . S(f; P)\right| = |\alpha| \left|\int_a^b f - D(f; P)\right| <$

$|\alpha| \dfrac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon$

Dengan kata lain terbukti bahwa $\alpha \in R[a, b]$ dan

$$\int_a^b \alpha . f = \alpha . \int_a^b f . \ \blacksquare$$

(ii). $\left|\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) - S(f + g; P)\right| = \left|\int_a^b f + \int_a^b g - (S(f; P) + S(g; P)\right|$

$< \left|\int_a^b f - S(f; P)\right| + \left|\int_a^b g - S(f; P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1} + \frac{\varepsilon}{M+1} < 2\varepsilon.$

Dengan kata lain, terbukti bahwa $f + g \in R[a, b]$ dan

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g . \ \blacksquare$$

Menurut akibat 2.2.6., Jika fungsi *f* terbatas dan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, kecuali di beberapa titik, maka fungsi *f* terintegral dan

$$\int_a^b f = 0$$

Dengan menggunakan hasil tersebut akan dibuktikan teorema di bawah ini.

Terorema 2.4.7. *Jika* $f \in R[a,b]$, *fungsi g terbatas pada* $[a,b]$, *dan* $g(x) \leq f(x)$ *kecuali di beberapa titik, maka* $g \in R[a,b]$, *dan*

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

Bukti : Karena fungsi *g* terbatas pada $[a,b]$ dan $g(x) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in R[a,b]$, maka fungsi $h = f - g$ mempunyai sifat terbatas pada $[a,b]$ dan $h(x) = 0$ untuk setiap $x \in R[a,b]$, kecuali dibeberapa titik. Oleh karena itu menurut akibat 2.2.6., fungsi *h* teintegral dan

$$\int_a^b h = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g = 0 \Leftrightarrow \int_a^b g = \int_a^b f . \blacksquare$$

Teorema 2.4.8. *Jika* $f \in R[a,b]$ *dan* $f(x) \geq 0$ *untuk setiap* $\in R[a,b]$, *maka*

$$\boxed{\int_a^b f \geq 0.}$$

Bukti : Karena $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in R[a,b]$ dan $f \in R[a,b]$, maka untuk setiap partisi $P = \{ a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \}$ pada $[a,b]$ diperoleh

$$0 \leq m\,(b-a) \leq L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P) \leq M\,(b-a)$$

dengan

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad d \qquad M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$$

Hal ini berakibat

$$0 \leq \lim_{||P|| \to 0} S(f;\, P) = \int_a^b f . \blacksquare$$

Teorema 2.4.9. *Jika* $f, g \in R[a, b]$ *dan* $f(x) \leq g(x)$ *untuk setiap* $x \in R[a, b]$, *maka*

$$\boxed{\int_a^b f \leq \int_a^b g}$$

Bukti : Dibentuk fungsi $h = g - f$. Mudah difahami bahwa $h \in R[a, b]$ dan $h(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in R[a, b]$. Menurut Teorema 2.4.8. diperoleh

$$0 \leq \int_a^b h = \int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f$$

atau terbukti

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g. \ \blacksquare$$

Teorema 2.4.10. Diketahui $I = [a, b]$, $c \in I$ *dan* $f : I \rightarrow \mathcal{R}$ *terbatas*. $f \in R[a, b]$ *jika dan hanya jika* $f \in R[a, c]$ *dan* $x \in R[c, b]$. *Dalam hal ini,*

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.}$$

Bukti : Syarat perlu : Karena $f \in R[a, b]$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$ sehingga

$$(i) \quad U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon$$

Dibentuk : $P' = P \cup \{c\}$, $P_1' = P' \cap [a, c]$, $P_2' = P' \cap [c, b]$. Jelas bahwa $P \subseteq P'$ dan $P' = P_1' \cup P_2'$ dengan $P_1' = P' \cap [a, c]$ partisi pada $[a, c]$ dan $P_2' = P' \cap [c, b]$ partisi pada $[c, b]$. Oleh karena itu diperoleh

$$(ii) \quad L(f; P) \leq L(f; P') = L(f; P_1') + L(f; P_2')$$

$$\leq \; U(f; P_1') + U(f; P_2') = U(f; \; P') \;\leq\; U(f; P)$$

Dari (*i*) dan (*ii*) diperoleh

$$\{U(f; P_1') - L(f; P_1')\} + \{U(f; P_2') - L(f; P_2')\}$$

$$= U(f; \; P') - L(f; P') \leq U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon$$

yang berakibat

$$U(f; P_1') - L(f; P_1') < \varepsilon \quad d \qquad U(f; P_2') - L(f; P_2') < \varepsilon$$

Dengan kata lain terbukti bahwa $f \in R[a, c]$ dan $f \in R[c, b]$. Lebih lanjut

$$\int_a^b f = \inf \{U(f; \; P') f; \; P' \in \pi[a, b]\}$$

$$= \inf \{U(f; \; P_1') + U(f; \; P_2'); \; P_1' \in \pi[a, c] \& P_2' \in \pi[c, b]\}$$

$$= \inf \{U(f; \; P_1'); P_1' \in \pi[a, c]\} + \inf \{U(f; \; P_2'); P_2' \in \pi[c, b]\}$$

$$= \int_a^c f + \int_c^b f. \quad \blacksquare$$

Syarat cukup : Karena $f \in R[a, c]$ dan $f \in R[c, b]$, maka nilai-nilai limit di bawah ini ada :

$$\int_a^c f = \lim_{\|P_1\| \to 0} S(f; P_1) \quad d \qquad \int_c^b f = \lim_{\|P_2\| \to 0} S(f; P_2)$$

dengan P_1 merupakan partisi pada [*a, c*] dan P_2 merupakan partisi pada [*c, b*]. Jelas bahwa $P = P_1 \cup P_2$ partisi pada [*a*, *b*]. Oleh karena itu

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\| \to 0} S(f; P) = \lim_{\|P\| \to 0} S(f; P_1 \cup P_2)$$

$$= \lim_{\|P_1\| \to 0} S(f; P_1) + \lim_{\|P_2\| \to 0} S(f; P_2)$$

$$= \int_a^c f + \int_c^b f. \ \blacksquare$$

Catatan : Syarat cukup dapat dibuktikan dengan memanfaatakan bahwa fungsi *f* terintegral Bardoux pada [*a*, *c*] maupun pada [*c*, *b*].

Teorema 2.4.11. *Jika fungsi* $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ *terintegralkan pada* [*a*, *b*] *serta fungsi* $\varphi : [c, d] \to \mathcal{R}$ *kontinu pada* [*a*, *b*] *dan* $f(x) \in [c, d]$ *untuk setiap* $x \in [a, b]$, *maka fungsi* $\varphi \circ f : [a, b] \to \mathcal{R}$ *terintegral pada* [*a*, *b*].

Bukti : Karena φ kontinu pada selang tertutup [*c*, *d*], maka φ terbatas di sana. Jadi, $K = \sup\{\varphi(t); t \in [c, d]\}$ ada. Lebih lanjut, fungsi φ kontinu seragam pada [*c*, *d*]. Oleh karena itu untuk sebarang bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat bilangan $\delta_1 < 0$ sehingga jika $s, t \in [c, d]$ dan $|s - t| < \delta_1$ berakibat

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2K + b - a + 1} = \varepsilon'.$$

Diambil $= \min\{\delta_1, \varepsilon'\}$. Karena fungsi *f* terintegralkan pada [*a*, *b*], maka terdapat partisis *P* pada [*a*, *b*] sehingga berlaku

$$U(f; P) - L(f; P) < \delta^2$$

Katakan $P = \{ a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b \}$, dan

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m'_k = \inf\{\varphi(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k' \;\; = \inf\{\varphi(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Dibedakan indeks *k* tersebut menjadi dua kelompok yang terpisah

$$A = \{k; M_k - m_k < \delta\} \quad d \qquad B = \{k; M_k - m_k \geq \delta\}.$$

Jika $k \in A$ dan , $y \in |x_{k-1}, x_k|$, maka diperoleh $|f(x) - f(y)| < M_k - m_k < \delta$ dan berakibat

$$\left|\varphi\big(f(x)\big) - \varphi\big(f(y)\big)\right| < \varepsilon'$$

Oleh karena itu

$$M_k' - m_k' \leq \varepsilon'$$

dan

$$\sum_{k \in A} (M_k' - m_k')\, \Delta_k x \leq \varepsilon'(b - a) \qquad (i)$$

Jika $\in B$, maka diperoleh $M_k' - m_k' \leq 2K$. Oleh karena itu

$$\sum_{k \in B} (M_k' - m_k')\, \Delta_k x \leq 2K \sum_{k \in B} (x_k - x_{k-1}) \qquad (ii)$$

Jika $\in B$, maka $\delta \leq M_k - m_k$ dan

$$\sum_{k \in B} (x_k - x_{k-1}) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k \in B} (M_k - m_k)\, \Delta_k x$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \{U(f; P) - L(f; P)\} < \delta \leq \varepsilon'$$

Oleh karena itu, untuk $k \in B$ diperoleh

$$\sum_{k \in B} (M_k' - m_k')\,\Delta_k x \leq 2K.\varepsilon' .$$

Dari (*i*) dan (*ii*) disismpulkan

$$U(\varphi \circ f; P) - L(\varphi \circ f; P) \leq \varepsilon'(b-a) + 2K.\varepsilon' < \varepsilon,$$

dengan kata lain terbukti fungsi $\varphi \circ f$ terintegral pada [*a*, *b*]. ■

Akibat 2.4.12. *Jika* $f \in R[a,b]$, *maka*

(i) $|f| \in R[a,b]$ *dan* $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$,

(ii) $f^n \in R[a,b], \forall n \in \mathcal{N}$, *dan*

(iii) $\frac{1}{f} \in R[a,b]$ *asalkan ada* $\alpha > 0$ *sehingga* $f(x) > \alpha$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$

Bukti : Bukti cukup difahami dengan memanfaatkan teorema 2.4.10. dan kenyataan bahwa $\varphi : R \to \mathcal{R}$:

(i) $\varphi(x) = |x|$,

(ii) $\varphi(x) = x^n$, dan

(iii) $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ dengan $x \neq 0$

masing-masing merupakan fungsi kontinu. ■

Telah diketahui bahwa jika $f, g : D \subseteq R \to \mathcal{R}$, maka diperoleh

$$f \quad = \frac{1}{2}\{(f+g)^2 - f^2 - g^2\}$$

fungsi yang terdefinisi pada D pula. Karena $R[a,b]$ ruang linier (Teorema 2.4.6) dan memanfaatkan Akibat 2.4.11., maka dapat dibuktikan dengan mudah teorema di bawah ini.

Teorema 2.4.13. *Jika* $f, g \in R\,[a,b], m \qquad f \quad \in R\,[a,b]$

Bukti : Akan ditunjukkan $\int_a^b g.f = \int_a^b f \,.\, \int_a^b g$. Karena $f, g \in R[a,b]$, maka menurut Teorema 2.4.3., fungsi f dan fungsi g masing-masing terbatas pada $[a,b]$.

Namakan

$$M_f = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\}, M_g = \sup\{|g(x)|; x \in [a,b]\}$$

dan

$$M = m \qquad \{M_f, M_g, 1\}$$

Karena $f, g \in R[a,b]$, maka untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$\left|\int_a^b f - S(f;P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1} \; d \qquad \left|\int_a^b g - S(f;P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Selanjutnya, diperoleh

$$\left|\left(\int_a^b f \cdot \int_a^b g\right) - S(f \cdot g;P)\right| = \left|\int_a^b f \cdot \int_a^b g - (S(f;P) \cdot S(g;P)\right|$$

$$< \left|\int_a^b f - S(f;P)\right| \cdot \left|\int_a^b g - S(f;P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1} \cdot \frac{\varepsilon}{M+1} < 2\varepsilon.$$

Maka,

$$\int_a^b (f \cdot g) = \int_a^b f \cdot \int_a^b g.$$

Dengan kata lain, terbukti bahwa $\in R[a,b]$. ■

CONTOH SOAL

1. Diberikan fungsi Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad u \qquad x\ ir \\ 0 \quad u \qquad x\ r \end{cases}$$

dengan $f \in [a,b]$. Karena fungsi *f* terbatas pada $[a,b]$, dimana fungsi *f* terintegralkan Darboux bahwa serta terintegral Darboux atas. Selanjutnya untuk setiap partisi $P = \{ a = x_0 , x_1 , . . . , x_n \}$ pada $[a,b]$ diperoleh

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$$

dan

$$M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$$

Oleh karena itu,

$$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x = 0,$$

dan

$$U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$

yang berakibat $\mathcal{L}(f) = \{0\}$, $\mathcal{U}(f) = \{1\}$.

Jadi,

$$(\underline{D})\int_a^b f = \sup_{P\ [a,b]} \mathcal{L}(f) = 0 \ , (\overline{D})\int_a^b f = \inf_{P\ [a,b]} \mathcal{U}(f) = 1.$$

2. Diberikan fungsi $g: [0,1] \rightarrow \mathcal{R}$ dengan rumus

$$g\ (x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & u \qquad x \in (0,1] \\ 1 & u \qquad x = 0 \end{cases}$$

Penyelesaian :

Mudah difahami bahwa fungsi g tak terbatas pada $[0,1]$. Untuk bilangan asli n dimana $h = \frac{1}{n}$ dan dibentuk partisi $P = \{0, h, 2h, 3h, \dots, nh = 1\}$ pada $[0,1]$. Diperoleh $[x_{i-1}, x_i\ ] = [(i-1)h, ih], \Delta_i x = h$.

$$m_i = \inf\{g(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \frac{1}{ih},$$

$$M_i = \sup\{g(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \begin{cases} \frac{1}{(i-1)h} & u \qquad i \neq 0 \\ \infty & u \qquad i = 1 \end{cases}$$

$$L(g;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta_i x = \frac{1}{h}.h + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{ih}.h = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = (1 + i + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})\ , d$$

$$U(g;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta_i x = \infty.h + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)h}.h = \infty + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}),$$

yang berakibat

(i). $s\quad P\quad [a,b]\ \mathcal{L}(f) = \infty\ (ti\quad a\quad)$

(ii).$i\quad P\quad [a,b]\ \mathcal{U}(f) = \infty\ (ti\quad a\quad)$

yang berarti f tak terintegral Darboux bawah maupun tak terintegral Darboux atas pada $[0, 1]$.

3. $D\quad fu\quad D\quad hl\quad f\ p\quad [a, b]\ d$

$$f\,(x) = \begin{cases} 1 & u \quad x\ i \\ 0 & u \quad x\ r \end{cases}$$

Telah diperlihatkan bahwa f iterintegral Darboux bawah pada $[a, b]$ dengan

$$(\underline{D})\int_a^b f = 0$$

dan terintegral Darboux atas pada $[a, b]$ dengan

$$(\overline{D})\int_a^b f = b - a$$

Jadi

$$0 = (\underline{D})\int_a^b f \le (\overline{D})\int_a^b f = b - a.$$

4. $D\quad f: [-1, 2] \rightarrow \mathcal{R}\ d\quad r$

$$g\,(x) = \begin{cases} -1 & u \quad x\ [-1,0] \\ 0 & u \quad x = 0 \\ \frac{1}{2} & u \quad x = (0,1) \\ 0 & u \quad x = 1 \\ 1 & u \quad x\ \ (1, 2] \end{cases}$$

Penyelesaian :

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$

Debentuk partisi pada $[-1, 2]$ sebagai berikut

$$P = \{-1, -h, 0, h, 1 - h, 1 + h, 2\}$$

(Bilangan $h > 0$ akan dibentuk kemudian).

Diperoleh

$$L(f; P) = \sum_{i=1}^{6} M_i \, \Delta_i x$$

$$= (-1)(1 - h) + (-1)h + 0 \cdot h + \frac{1}{2}(1 - 2h) + \ 0 \cdot 2h + 1(1 - h)$$

$$= \frac{1}{2} - 2h,$$

dan

$$U(f; P) = \sum_{i=1}^{6} M_i \, \Delta_i x$$

$$= (-1)(1 - h) + 0 \cdot h + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(1 - 2h) + \ 1 \cdot 2h + 1(1 - h)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3h}{2},$$

sehingga

$$U(f; P) - \ L(f; P) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3h}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2h\right) = \frac{7}{2}\, h$$

Dapat diambil bilangan positif *h* sehingga berlaku

$$U(f; P) - \ L(f; P) = \frac{7}{2}h < \varepsilon.$$

yaitu $h < \frac{2}{7}\varepsilon$. Dengan kata lain dapat dibentuk (ada) partisi P pada $[-1, 2]$ seperti tersebut di atas dengan $h < \frac{2}{7}\varepsilon$ sehingga berlaku

$$U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon.$$

Jadi, fungsi f terintegral Darboux pada $[-1, 2]$ dengan nilai integral Darboux $(\varepsilon \to 0 \Longrightarrow h \to 0)$:

$$(D)\int_{-1}^{2} f = \lim_{h \to 0} U(f; P) = \lim_{h \to 0} L(f; P) = \frac{1}{2}.$$

5. D f D $hl\epsilon$ $f: [a, b] \to \mathcal{R}, d$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & u \quad x\ ir \\ 0 & u \quad x\ r \end{cases}$$

Telah diperlihatkan bahwa fungsi f terintegral Darboux atas dan terintegral Darboux bawah pada selang $[a, b]$ dengan

$$(\overline{D})\int_{a}^{b} f = b - a$$

Dan

$$(\underline{D})\int_{a}^{b} f = 0$$

Karena kedua nilai itu tak sama, maka fungsi Dirichlet tersebut tak terintegral Darboux pada $[a, b]$.

2.5 Ruang Barisan

Definisi 2.5.1 (Soeparna, 2007)

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*, jadi:

$$\omega = \{\overline{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \le p < \infty$ didefinisikan $l^p = \left\{x = \{x_j\} \in \omega: \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^p < \infty\right\}$ dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = 1$ didefinisikan $l^1 = \left\{x = \{x_j\} \in \omega: \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right| < \infty\right\}$ dan norm pada l^1 yaitu

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|$$

c. Untuk $p = \infty$ didefinisikan $l^\infty = \left\{x = \{x_j\} \in \omega: < \infty\right\}$ dan norm pada l^∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \ge 1} |x_j|$$

Teorema 2.5.3 (Soeparna, 2007)

$l^p (1 \le p \le \infty)$ merupakan ruang Bernorma terhadap norm $\|.\|_p$.

Teorema 2.5.4 (Soeparna, 2007)

Jika bilangan *real* p dengan $1 \le p \le \infty$, maka $(l^p, \|.\|_p)$ merupakan ruang Banach.

Definisi 2.5.6 (Ruckle, 1991)

Misalkan X merupakan ruang barisan, X dikatakan ruang *BK* jika X merupakan ruang Banach dan pemetaan koordinatnya $P_n(x) = x_n$, $x = (x_k) \in X$ kontinu.

Contoh ruang BK adalah ruang barisan l^p, $1 \leq p \leq \infty$.